4. CVIČENÍ Z DATOVÝCH STRUKTUR 1, ZS24/25

(a, b)-stromy

1. *Rozděl a spojuj.* Pro splay strom T navrhněte operaci $\textsc{Split}(k)$, která T rozdělí na dva stromy T', T'', přičemž v T' jsou všechny hodnoty menší nebo rovny k a ve stromě T'' ty zbylé. Pokuste se zachovat amortizovanou složitost.

Dále pro splay stromy T', T'', kde všechny hodnoty v T' jsou menší než všechny hodnoty v T'', navrhněte operaci $\textsc{Join}(T', T'')$, která sloučí stromy do jednoho, opět při zachování amortizované časové složitosti.

2. *Splay potenciál.* Ujistěte se, že chápete, jak je definovaný potenciál ve splay stromech a že rozumíte hlavním myšlenkám analýzy amortizované složitosti splaye.

a) Jak je definován potenciál splay stromu?
b) Jaká je amortizovaná cena rotace (dvojité a jednoduché)?
c) Jaká je amortizovaná cena celého splaye a jak plyne z amortizovaných cen rotace?
d) Jaké je *reálná* cena celého splaye a v jakých jednotkách se jí hodí počítat?
e) Jaký je potenciál perfektně vyváženého stromu? (Stačí nám rozumný horní a dolní odhad, pro jednoduchost předpokládejte $n = 2^k - 1$.)
f) Jaký je potenciál cesty? (Opět stačí rozumné odhady.)

Na cvičení jsme probrali následující: Ukažte, že libovolný (a, b)-strom (i pro $b = 2a - 1$) lze vytvořit ze setřízené posloupnosti klíčů v lineárním čase. Konkrétně to jde tak, že vždy přidáváme další klíč do nejpravějšího vrcholu na spodní hladině a pokud přeteče, tak provádíme štěpení vrcholů. Důležité je, že nejpravější vrchol na spodní hladině nehledáme z kořene, ale udržujeme si na něj odkaz. Ukažte, že pak tento proces seběhne v lineárním čase.

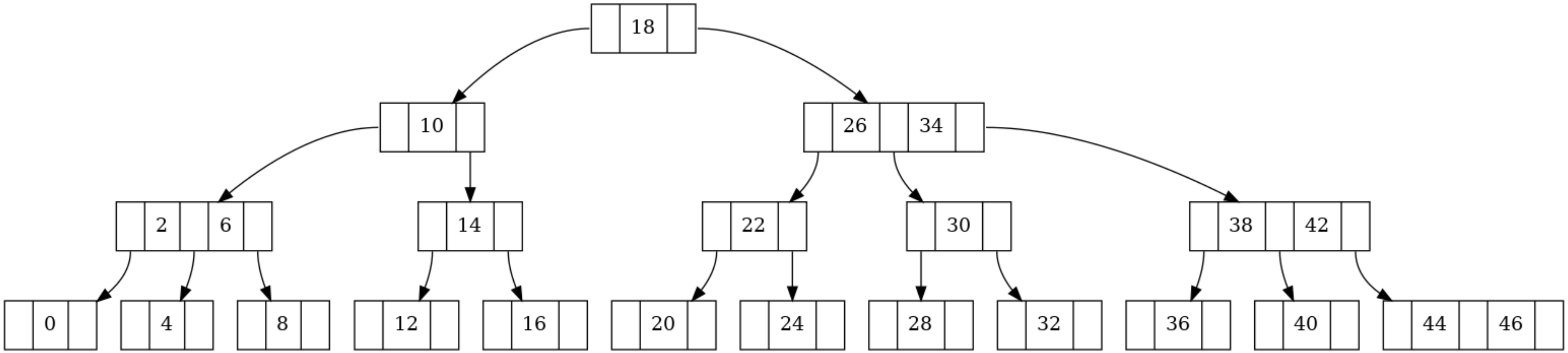
3. *Jedna $(2, 3)$-rozcvička.* Viz druhá strana.

4. *Logaritmická složitost $(a, 2a-1)$-stromů.* Z přednášky víme, že libovolná posloupnost m operací $\textsc{Insert}$ a $\textsc{Delete}$ na $(a, 2a)$-stromu celkem změní jenom $O(m)$ vrcholů, pokud začneme s prázdným stromem. Ukažte, že toto neplatí pro $(a, 2a-1)$-stromy, tedy pro libovolné m, n navrhněte posloupnost m operací na stromě s $\Theta(n)$ vrcholy, která celkem změní $\Omega(m \cdot \log n)$ vrcholů. Můžete začít s $(2, 3)$-stromy a potom zobecnit pro libovolné a. Zároveň můžete začít s libovolným validním $(a, 2a - 1)$-stromem a pak ukázat, že lze takový strom lze vyrobit z prázdného stromu.

5. *Malé zaplnění.* Nevýhodou (a, b)-stromů je, že plýtvají pamětí – může se stát, že vrcholy jsou zaplněné jen z poloviny. Navrhněte úpravu, která zaručí zaplnění z alespoň $2/3$, až na kořen. Chtěli bychom tedy dostat $(\frac{2}{3}b, b)$-strom.

6. *(a, b)-join.* Navrhněte operaci $\textsc{Join}(X, Y)$, která dostane dva (a, b)-stromy X a Y a sloučí je do jednoho. Může se přitom spolehnout na to, že všechny klíče z X jsou menší než všechny z Y. Zkuste dosáhnout složitosti $O(\log |X| + \log |Y|) = O(\log(|X| + |Y|))$.

7. *Bonus: (a, b)-split.* Navrhněte operaci $\textsc{Split}(T, x)$, která zadaný (a, b)-strom T rozdělí na dva stromy. V jednom budou klíče menší než x, v druhém ty větší. Pokuste se o logaritmickou časovou složitost. (Hint: vhodně rozdělte T na podstromy.)



Obrázek 1: Na tomto $(2,3)$-stromu proveďte následující operace (tedy alespoň dokud si nebudete jisti, jak přesně operace fungují): Insert(7), Insert(48), Delete(44), Delete(40), Delete(32), Delete(30) a Delete(16)