

11. CVIČENÍ Z ADS 1, ČTVRTEK 15:40, LS '24

Rozděl (problémy) a panuj (nad algoritmy)!

1. *Vícecestý MergeSort*. Upravme MergeSort, aby rozdělil pole na k částí, ty pak setřídil rekurzivně a slil. V jakém čase lze slévat k setříděným polí o celkové délce n ? Jaká je pak celková časová složitost vícecestného MergeSort? Jaké se vyplatí zvolit k ?

2. *Rekurence*. Vyřešte následující rekurence (kde vždy máme $T(1) = 1$):

a) $T(n) = T(n/2) + \Theta(1)$ (např. binární vyhledávání)

b) $T(n) = 16T(n/4) + \Theta(n)$

c) $T(n) = 8T(n/2) + \Theta(n^2)$

d) $T(n) = 7T(n/2) + \Theta(n^2)$

e) $T(n) = 7T(n/2) + \Theta(n^3)$

f) $T(n) = 8T(n/2) + \Theta(n^3)$

g) $T(n) = 9T(n/2) + \Theta(n^3)$

3. „*Nekuchařkové*“ rekurence. Vyřešte následující rekurence (opět máme $T(1) = 1$):

a) $T(n) = 2T(n-1) + \Theta(1)$ (např. Hanojské věže)

b) $T(n) = T(n-1) + \Theta(n)$

c) $T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n \log n)$

d) $T(n) = \sqrt{n} \cdot T(\sqrt{n}) + \Theta(n)$

e) $T(n) = T(n/3) + T(n/7) + n$

4. *Spletitý kabel*. Mějme dlouhý kabel, z jehož obou konců vystupuje po n drátech. Každý drát na levém konci je propojen s právě jedním na konci druhém a my chceme zjistit, který s kterým. K tomu můžeme používat následující operace:

- i) přivést napětí na daný drát na levém konci,
- ii) odpojit napětí z daného drátu na levém konci,
- iii) změřit napětí na daném drátu na pravém konci.

Navrhněte algoritmus, který pomocí těchto operací zjistí, co je s čím propojeno. Snažte se počet operací minimalizovat. (Bonus: umíte dokázat, že na asymptoticky menší operací úlohu vyřešit nelze?)

5. *Převod mezi soustavami*. Mějme n -ciferné číslo v soustavě o základu z a chceme ho převést do soustavy o jiném základu (z považujeme za konstantu). Ukažte, jak to metodou Rozděl a panuj zvládnout v čase $O(M(n) \cdot \log n)$, kde $M(n)$ je čas potřebný na násobení n -ciferných čísel v soustavě o novém základu.

6. *Vylepšená kuchařka*. Vylepšete Kuchařkovou větu (Master Theorem), aby pokrývala případy, kdy se velikosti podproblémů liší o konstantu, tedy $T(n) \leq aT(n/b + k) + \Theta(n^c)$ pro konstantu k .

7. *Hanoj*. V úloze Hanojských věží máme 3 sloupce A, B, C, přičemž sloupec A obsahuje n disků v pořadí dle jejich průměru (největší dole, nejmenší nahoře). Jak přemístit všechny disky ze sloupce A na B, přičemž je zakázáno položit větší disk na menší? Kolik přesunů musíme udělat?

8. *Hanoj 2*. Přidejme k Hanojským věžím ještě jedno pravidlo: je zakázáno přenášet disky přímo ze sloupce A na B nebo opačně (každý přesun se tedy musí uskutečnit přes sloupec C). I nyní je problém řešitelný. Jak a s jakou časovou složitostí?