KG2 barvení 1

pro které grafy $\chi(G) = \Delta(G)+1$?

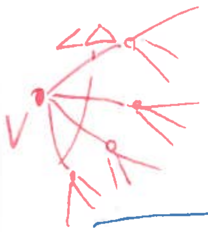
Brooksova věta: Nechť G je souvislý graf max. stupněm Δ, který není lichý cyklus ani klika. Pak $\chi(G) \le \Delta$.

(G vždy souvislý)

Lemma R: Pokud G není regulární (Δ-reg.), pak $\chi(G) \le \Delta$.

(G není regulární $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \exists$ vrchol stupně $< \Delta$)

Dk.: v = vrchol stupně $< \Delta$



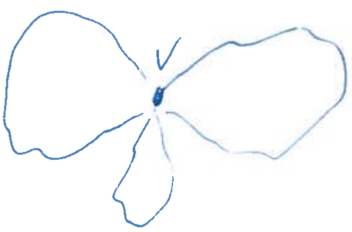
$v_0 = v, v_1, \dots, v_n$ = pořadí dle BFS z v

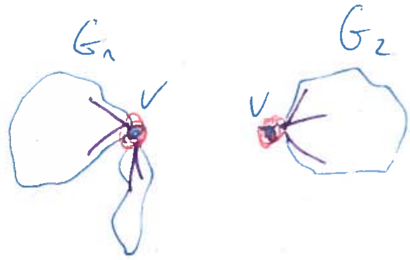
barvíme v pořadí $v_n, v_{n-1}, \dots, v_1, v$ – vždy $< \Delta$ sousedů nalevo – z BFS $\square$

$\Delta \le 2 \Rightarrow G$ je cesta nebo sudý cyklus $\Rightarrow \chi(G) \le 2$

Dk. Brooksovy věty: $\Rightarrow$ předpoklad: $\Delta \ge 3$ – jinak a G Δ-regulární

$k_v(G) = 1$:



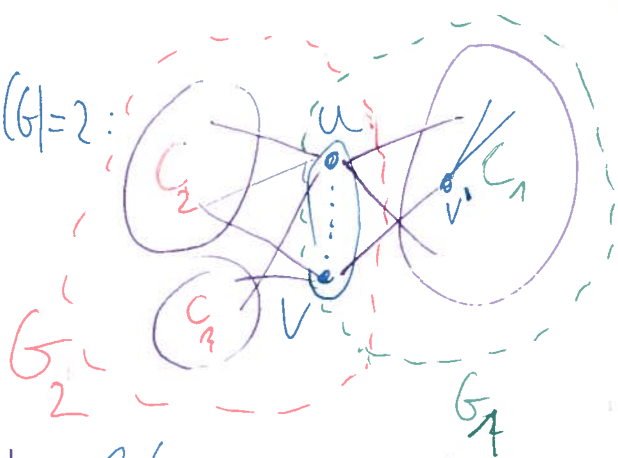


G_1 ani G_2 nejsou Δ-regulární $\Rightarrow$ $\chi(G_1), \chi(G_2) \le \Delta$

BÚNO v má stejnou barvu

$\rightarrow$ obarvení G $\le \Delta$ barvami

$k_v(G) = 2$:



$G_1 = G[C_1 \cup \{u, v\}] + uv$

$G_2 = G[C_2 \cup C_3 \cup \dots \cup C_e \cup \{u, v\}] + uv$

pokud $uv \in E \Rightarrow \deg_{G_1}(u) \le \Delta - 1$, $\deg_{G_2}(v) \le c-1$

pokud $uv \notin E$: BÚNO: v má ≥ 2 sousedy v $G \setminus \{u\}$ – jinak $\{u, v'\}$ je také řez

v' jediný soused v $G_1 \setminus \{u\}$

pro řez $\{u, v'\}$ platí – uv' je hrana ✓

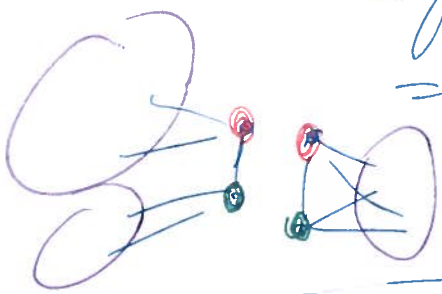
v' má ≥ 2 sousedy v $G_1' = G_1 \setminus \{v\}$

(G2 barvení 2/

podobně: u má ≥ 2 sousedy v $G_2 \setminus \{v\}$ (BÚNO)

$\Rightarrow \deg_{G_1}(u) \leq \Delta - 1$ (ne -2 kvůli hraně uv, pokud v G nebyla)

a $\deg_{G_2}(v) \leq \Delta - 1$

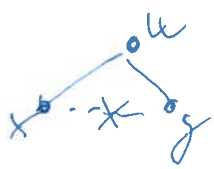


$\Rightarrow \chi(G_1), \chi(G_2) \leq \Delta$

BÚNO: u, v mají barvy 1, 2 v G_1 i G_2

$\Rightarrow$ obarvení sjednotíme $\Rightarrow \chi(G) \leq \Delta$

$K_v(G) \geq 3$: $\exists$ vrcholy x, y nesousední, se společným sousedem u (indukovaný podgraf $K_{1,2}$)



„Lemma o třešničce"

používáme, že $G \not\cong K_n$

3-souvislost $\Rightarrow G \setminus \{x, y\}$ souvislý

$v_1 = u, v_2, \dots v_{n-2}$ = vrcholy v pořadí dle BFS z u (dle vzdálenosti od u)

barvíme hladově v pořadí $x, y, \underline{v_{n-2}, v_{n-1}, \dots v_2}, v_1 = u$

- Stejná barva pro x, y
- pro $i = n-2, \dots 2$: v_i má souseda v_j pro $j < i$
  $\Rightarrow < \Delta$ sousedů „nalevo"
  $\Rightarrow$ barva $\leq \Delta$
- v_1: sousedí s $< \Delta$ barvami

$\chi(G) \leq \Delta$

$\square$

Q.E.D.

KG2 barvení 3/

Hranové obarvení: def: $\varphi: E(G) \to \{1, \dots k\}$ je hranové k-obarvení, pokud $\forall e \neq f \in E(G), e \cap f \neq \emptyset: \varphi(e) \neq \varphi(f)$ (incidentní)

$\Delta = 4$
$\chi' = 4$

$\Delta = 2$
$\chi' = 3$

- každá barva je párování

def: $\chi'(G)$ Hranová barevnost G je min. k t.ž. $\exists$ hranové k-obarvení G,

$\chi'(G) \geq \Delta(G)$

$\chi'(G) \geq \frac{|E(G)|}{\mu} \dots \mu$ = velikost největšího párování

Vizingova věta ('64): Pro graf G bez multihran a smyček platí: $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$

nutná podmínka

$\Delta+1$ barev $\Rightarrow \geq 1$ barva chybí u lib. vrcholu $\Rightarrow \Delta \leq \chi' \leq \Delta + 1$

NP-těžké rozhodnout

Dk: indukcí dle $|E|$; $|E| = 0$ triv.

I.K. $uv \in E \dots G' = G - uv$ má obarvení $\Delta+1$ barvami

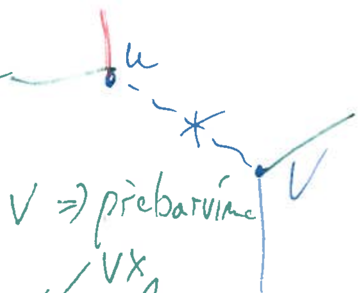
(obarvení vždy hranové)

stačí dokázat: pro u,v nesousední v G' (kt. lze obarvit $\Delta+1$ barvami)

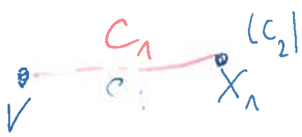
Lemma $\exists$ obarvení G' t.ž. vrcholy u,v mají stejnou chybějící barvu.

Důkaz Lemmatu: c_1 := barva chybějící ve u

pokud chybí ve v ✓



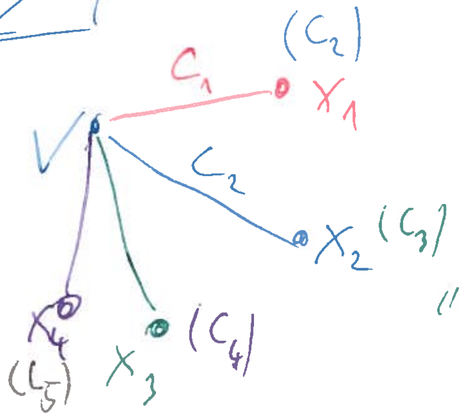
(c_1) u



pokud c_2 chybí ve v ⇒ přebarvíme vx_1

c_1 chybí ve v ✓

KG2 barvení 4/



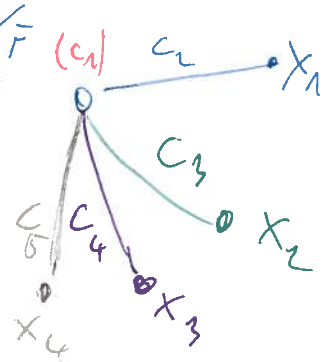
„vějíř"

for $i=1,2,\dots$: pokud $\exists$ barva $c_{i+1} \notin \{c_1,\dots,c_i\}$, kt. chybí v x_i ale ne ve V, Vx_{i+1} hrana barvy c_{i+1}

– proces se zastaví – a) c_{k+1} chybí v x_k a také ve V

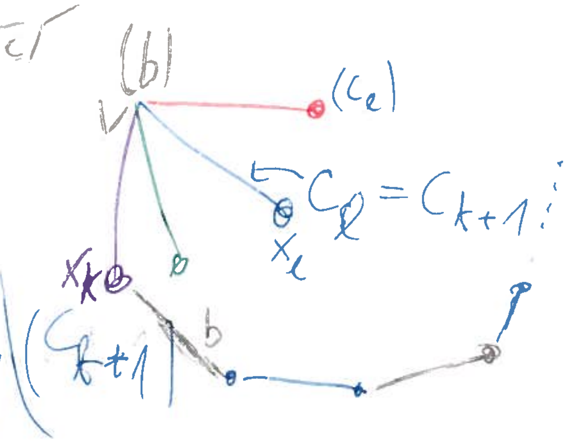
↪ přebarvíme vějíř

hrana Vx_i dostane barvu c_{i+1} / c_1 chybí ve V



b) $c_{k+1} = c_\ell$ pro $\ell \in \{1,\dots,k\}$

b = barva chybějící ve V



K = komponenta podgrafu hran barev b a c_{k+1} „Kempeho řetězec" která obsahuje x_k

(stupně v K) ≤ 2 ⇒ K je cesta nebo sudý cyklus

– stupeň x_k v K je 1 ... c_{k+1} chybí v x_k ⇒ K je cesta

y := druhý konec cesty K

I.) $y = V$ ... b chybí ve V ⇒ poslední hrana je Vx_ℓ

– prohodíme barvy na K ⇝ $c_\ell = c_{k+1}$ chybí ve V

– pak přebarvíme část vějíře od x_1 po x_ℓ (jako v a) ⇒ c_1 chybí ve V

↪ změní chybějící barvy jen na koncích

TG2 barvení 5

II.) $g \neq v$ $\Rightarrow$ v není vrcholem K (b chybí ve v)

$\Rightarrow x_\ell \notin V(K)$ ... jinak v ve $V(K)$

α) $y \notin \{x_{\ell-1}, u\}$ ... prohodíme barvy na K →

→ b chybí v x_k a c_1 chybí v u

- přebarvíme vějíř jako v a)

∴ hrana vx_i pro $i<k$ dostane c_{i+1}

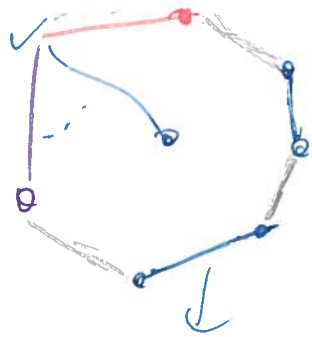
a vx_k dostane b

$\Rightarrow c_1$ chybí ve v

β) $y = x_{\ell-1}$ ~ $c_\ell = c_{k+1}$ chybí v $x_{\ell-1}$ $\Rightarrow$ do $x_{\ell-1}$ vede hrana barvy b

- prohodíme K → b chybí v $x_{\ell-1}$
- přebarvíme část vějíře od x_1 po $x_{\ell-1}$ jako v a)

$\Rightarrow c_1$ chybí ve v



c) $y = u$ ~ b chybí v u → b chybí taktéž ve v ✓

jinak K končí hranou do u barvy b →

→ prohodíme barvy na K

□