12. CVIČENÍ Z KG 2, PONDĚLÍ 22.5.

Extremální kombinatorika

1. Nechť $\mathcal{A}$ je systém podmnožin množiny $[n] := \{1, \dots, n\}$, ve kterém se každé dvě podmnožiny protínají. Nalezněte optimální dolní a horní odhady na velikost $\mathcal{A}$. (Hint: zkuste nejprve zkonstruovat co největší $\mathcal{A}$ takové, že každé dvě podmnožiny se protínají.)

2. Dokažte, že místo podmnožin velikosti k v Erdős-Ko-Rado můžeme uvažovat nezávislé podmnožiny velikosti maximálně k. Neboli dokažte následující:

Jestliže $n \geq 2k$, pak protínající se systém podmnožin $[n]$ velikosti maximálně k takových, že žádná není podmnožinou jiné, má velikost maximálně $\binom{n-1}{k-1}$.

3. Ukažte, že jestliže G je graf s n vrcholy, $K_4 \not\subseteq G$ a v je vrchol G stupně 3, pak G má minor s $n-1$ vrcholy a alespoň $|E(G)| - 2$ hranami.

S pomocí tohoto tvrzení dokažte, že jestliže G je graf s $n \geq 4$ vrcholy a alespoň $2n-2$ hranami, pak $K_4 \preceq_m G$.

4. Nechť $\mathrm{ex}(H, n) = \max\{|E(G)| : |V(G)| = n, H \not\subseteq G\}$ je extremální počet hran pro graf n vrcholy neobsahující H jako podgraf.

Ukažte, že pro každý graf H a přirozená čísla $n_1 \leq n_2$ platí

$$\frac{\mathrm{ex}(H, n_1)}{\binom{n_1}{2}} \geq \frac{\mathrm{ex}(H, n_2)}{\binom{n_2}{2}}.$$

(Hint: Pro graf G s n_2 vrcholy tž. $H \not\subseteq G$ počítejte dvěma způsoby počet dvojic (X, e), kde $X \subseteq V(G)$ je množina velikosti n_1 a $e \in E(G[X])$).

Vyvoďte, že limita $\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{ex}(H,n)}{\binom{n}{2}}$ vždy existuje.