

10. CVIČENÍ Z ADS 2, ČTVRTEK 15:40

Polynomiální převody problémů, třídy P a NP , NP -těžkost a NP -úplnost

1. Převody. Na druhé straně najdete část z nejznámějších NP -úplných problémů, můžete si vyzkoušet převádět je mezi sebou, což je $n \cdot (n - 1)$ různých převodů (některé jsou snadné, jiné těžší). Zde je pár tipů, co vyzkoušet:

- a) KLIKA, NEZÁVISLÁ MNOŽINA a VRCHOLOVÉ POKRYTÍ (zkuste převést navzájem mezi sebou)
- b) SAT na 3-SAT (obráceně triviální)
- c) SOUČET PODMNOŽINY a DVA LOUPEŽNÍCI (oběma směry)
- d) SOUČET PODMNOŽINY na BATOH
- e) KLIKA na SAT (obráceně bylo na přednášce). Hint: hledejte očíslovanou kliku, tedy uspořádanou k -tici vrcholů, které tvoří kliku.
- f) 3D-PÁROVÁNÍ na 0/1 LINEÁRNÍ ROVNICE.
- g) 0/1 LINEÁRNÍ ROVNICE na SOUČET PODMNOŽINY. Hint: násobení matice binárním vektorem x odpovídá součtu sloupců.

2. Vyřešit rozhodovací problémy stačí. Ukažte, že pokud umíme efektivně vyřešit rozhodovací problém, řešení najdeme také efektivně (v polynomiálním čase). Konkrétně:

- a) Máte černou skříňku, která říká, jestli má daná formule splňující ohodnocení. Jak nějaké takové splňující ohodnocení naleznete? Černou skříňku můžete použít vícekrát.
- b) Máte algoritmus pro problém NEZÁVISLÁ MNOŽINA, tj. černou skříňku která na vstup (G, k) odpoví jestli graf G obsahuje nezávislou množinu velikosti k . Jak pomocí polynomiálně mnoha volání tohoto algoritmu nalezneme maximální nezávislou množinu v grafu?

3. Lehké (ale netriviální) problémy: Ukažte, že v polynomiálním čase umíme řešit následující problémy:

- a) Lze graf G obarvit dvěma barvami (2-BAREVNOST)?
- b) Je formule v DNF splnitelná?
- c) Existuje v grafu G klika velikosti 42 (KLIKA konstantní velikosti)?
- d) 2-SAT: splnitelnost formule v CNF, kde každá klauzule obsahuje max. 2 literály

Katalog NP-úplných problémů

V nabídce máme tisíce produktů problémů, zde jsou jedny z nejoblíbenějších:

- *Logické problémy:*
 - SAT: splnitelnost logických formulí v CNF
 - 3-SAT: každá klauzule obsahuje max. 3 literály
 - 3,3-SAT: navíc se každá proměnná vyskytuje nejvýše třikrát
 - SAT PRO OBECNÉ FORMULE: nejen v CNF.
 - OBVODOVÝ SAT: splnitelnost booleovského obvodu.
- *Grafové problémy:*
 - NEZÁVISLÁ MNOŽINA: existuje nezávislá množina na k vrcholech?
 - KLIKA: existuje úplný podgraf na k vrcholech?
 - VRCHOLOVÉ POKRYTÍ: existuje množina U o k vrcholech taková, že každá hrana má alespoň jeden vrchol v U ?
 - k -BAREVNOST: lze obarvit vrcholy k barvami (přidělit každému vrcholu číslo od 1 do k) tak, aby vrcholy stejné barvy nebyly nikdy spojeny hranou)? To je NP-úplné už pro $k = 3$.
 - HAMILTONOVSKÁ CESTA: existuje cesta obsahující všechny vrcholy?
 - HAMILTONOVSKÁ uv -CESTA: existuje cesta mezi u a v , která obsahuje všechny vrcholy grafu?
 - HAMILTONOVSKÁ KRUŽNICE: existuje kružnice obsahující všechny vrcholy?
 - PROBLÉM OBCHODNÍHO CESTUJÍCÍHO: hrany jsou ohodnoceny délkami $\ell(e) \geq 0$, existuje hamiltonovská kružnice délky nejvýše k ?
 - 3D-PÁROVÁNÍ: máme tři množiny se zadanými trojicemi; zjistěte, zda existuje taková množina disjunktních trojic, ve které jsou všechny prvky právě jednou? (Zde se nejedná o graf, ale 3-uniformní hypergraf.)
- *Číselné problémy:*
 - SOUČET PODMNOŽINY: má daná množina přirozených čísel podmnožinu s daným součtem?
 - BATOHO: jsou dány předměty s váhami a cenami a kapacita batohu, existuje podmnožina předmětů ceny alespoň C , jejíž váha nepřesáhne kapacitu batohu?
 - DVA LOUPEŽNÍCI: lze rozdělit danou množinu čísel na dvě podmnožiny se stejným součtem?
 - 0/1 LINEÁRNÍ ROVNICE: je dána matice $\mathbf{A} \in \{0, 1\}^{m \times n}$. Existuje vektor $\mathbf{x} \in \{0, 1\}^n$ takový, že \mathbf{Ax} je rovno vektoru samých jedniček?