Algoritmy a datové struktury 1

2/2 Z+Zk, NTIN060

pomocné slajdy k algoritmickým technikám
rozděl a panuj, dynamické programování, pravděpodobnostní analýza

Pavel Veselý (IUUK)

vesely+ads1@iuuk.mff.cuni.cz

https://iuuk.mff.cuni.cz/~vesely/vyuka/LS2122/ads1.html

Rozděl (problém) **a panuj** (nad algoritmy)

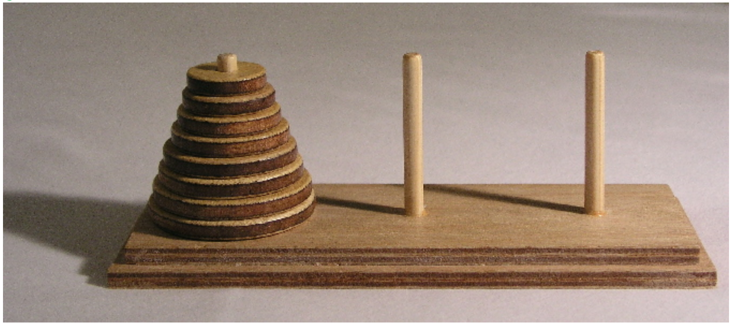
Divide et impera!

Kuchařka:

1. Rozdělíme problém na několik podproblémů
2. Pustíme algoritmus rekurzivně na každý podproblém
3. Spojíme řešení

Příklady:

- Hanojské věže



Rozděl (problém) **a panuj** (nad algoritmy)

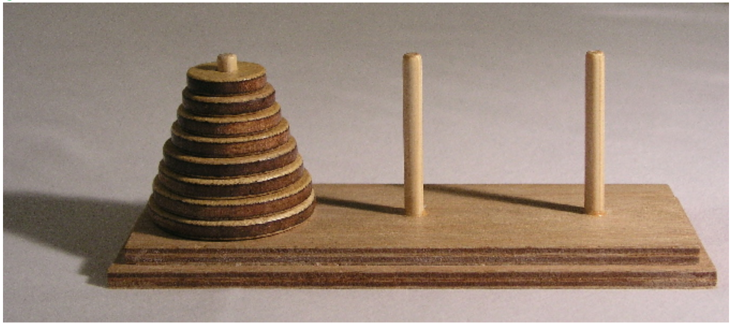
Divide et impera!

Kuchařka:

1. Rozdělíme problém na několik podproblémů
2. Pustíme algoritmus rekurzivně na každý podproblém
3. Spojíme řešení

Příklady:

- Hanojské věže Autor obrázku: Ævar Arnfjör Bjarmason, Wikimedia Commons, CC BY-SA 3.0



- MergeSort — třídění sléváním
- Karacubův algoritmus pro násobení čísel
- Strassenův algoritmus pro násobení matic
- QuickSelect pro hledání k-tého nejmenšího prvku
- QuickSort pro třídění

Kuchařková věta (Master Theorem)

Věta: Rekurentní rovnice časové složitosti:

$$\mathrm{T(n)}{=}\mathrm{a}\cdot T\left(\frac{n}{b}\right) + \Theta(n^c) \qquad \text{a} \qquad T(k) = \Theta(1) \text{ pro } k = O(1)$$

má pro konstanty $a \geq 1, b > 1, c \geq 0$ řešení

- $T(n) = \Theta(n^c \log n)$, pokud $a/b^c = 1$
- $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, pokud $a/b^c > 1$
- $T(n) = \Theta(n^c)$, pokud $a/b^c < 1$

Násobení n-ciferných čísel

„Školní“ algoritmus v $\Theta(n^2)$:

```
      23958233
×         5830
_______________
      00000000 ( =      23,958,233 ×     0)
     71874699  ( =      23,958,233 ×    30)
   191665864   ( =      23,958,233 ×   800)
+ 119791165    ( =      23,958,233 × 5,000)
_______________
  139676498390 ( = 139,676,498,390        )
```

Násobení n-ciferných čísel

„Školní“ algoritmus v $\Theta(n^2)$:

```
      23958233
×         5830
———————————————
      00000000 ( =      23,958,233 ×     0)
     71874699  ( =      23,958,233 ×    30)
   191665864   ( =      23,958,233 ×   800)
+ 119791165    ( =      23,958,233 × 5,000)
———————————————
  139676498390 ( = 139,676,498,390        )
```

Lze násobit v čase $o(n^2)$?

Násobení n-ciferných čísel

„Školní“ algoritmus v $\Theta(n^2)$:

```
      23958233
×         5830
———————————————
      00000000 ( =      23,958,233 ×     0)
     71874699  ( =      23,958,233 ×    30)
    191665864  ( =      23,958,233 ×   800)
+ 119791165    ( =      23,958,233 × 5,000)
———————————————
  139676498390 ( = 139,676,498,390        )
```

Lze násobit v čase $o(n^2)$?

1960: Kolmogorov uspořádal workshop, kde chtěl ukázat dolní odhad $\Omega(n^2)$

- Karacuba na něm našel lepší algoritmus pomocí rozděl a panuj

Násobení n-ciferných čísel

„Školní" algoritmus v $\Theta(n^2)$:

```
      23958233
×         5830
———————————————
      00000000 ( =      23,958,233 ×     0)
     71874699  ( =      23,958,233 ×    30)
   191665864   ( =      23,958,233 ×   800)
+ 119791165    ( =      23,958,233 × 5,000)
———————————————
  139676498390 ( = 139,676,498,390        )
```

Lze násobit v čase $o(n^2)$?

1960: Kolmogorov uspořádal workshop, kde chtěl ukázat dolní odhad $\Omega(n^2)$

- Karacuba na něm našel lepší algoritmus pomocí rozděl a panuj

Je násobení „asymptoticky těžší" než sčítání?

Násobení n-ciferných čísel

„Školní“ algoritmus v $\Theta(n^2)$:

```
      23958233
×         5830
———————————————
      00000000 ( =      23,958,233 ×     0)
     71874699  ( =      23,958,233 ×    30)
   191665864   ( =      23,958,233 ×   800)
+ 119791165    ( =      23,958,233 × 5,000)
———————————————
  139676498390 ( = 139,676,498,390        )
```

Lze násobit v čase $o(n^2)$?

1960: Kolmogorov uspořádal workshop, kde chtěl ukázat dolní odhad $\Omega(n^2)$

- Karacuba na něm našel lepší algoritmus pomocí rozděl a panuj

Je násobení „asymptoticky těžší“ než sčítání?

- Pomocí rozděl a panuj lze dosáhnout pro každé $\varepsilon > 0$ složitosti $O_\varepsilon(n^{1+\varepsilon})$
- Pomocí Fourierovy transformace: $O(n \log n)$ (ADS 2)
- Schönhage a Strassen ('71): čas $O(n)$

Násobit lze v asymptoticky stejném čase jako sčítat!

Strassenův algoritmus pro násobení matic ('69)

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_{11} & B_{21} \\ B_{12} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} \\ C_{12} & C_{22} \end{bmatrix}$$

Strassenův algoritmus pro násobení matic ('69)

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_{11} & B_{21} \\ B_{12} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} \\ C_{12} & C_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
M_1 &= (A_{11} + A_{22})(B_{11} + B_{22}); \\
M_2 &= (A_{21} + A_{22})B_{11}; \\
M_3 &= A_{11}(B_{12} - B_{22}); \\
M_4 &= A_{22}(B_{21} - B_{11}); \\
M_5 &= (A_{11} + A_{12})B_{22}; \\
M_6 &= (A_{21} - A_{11})(B_{11} + B_{12}); \\
M_7 &= (A_{12} - A_{22})(B_{21} + B_{22}),
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 + M_4 - M_5 + M_7 & M_3 + M_5 \\ M_2 + M_4 & M_1 - M_2 + M_3 + M_6 \end{bmatrix}$$

Zdroj obrázků: Wikimedia Commons, autor Cyp

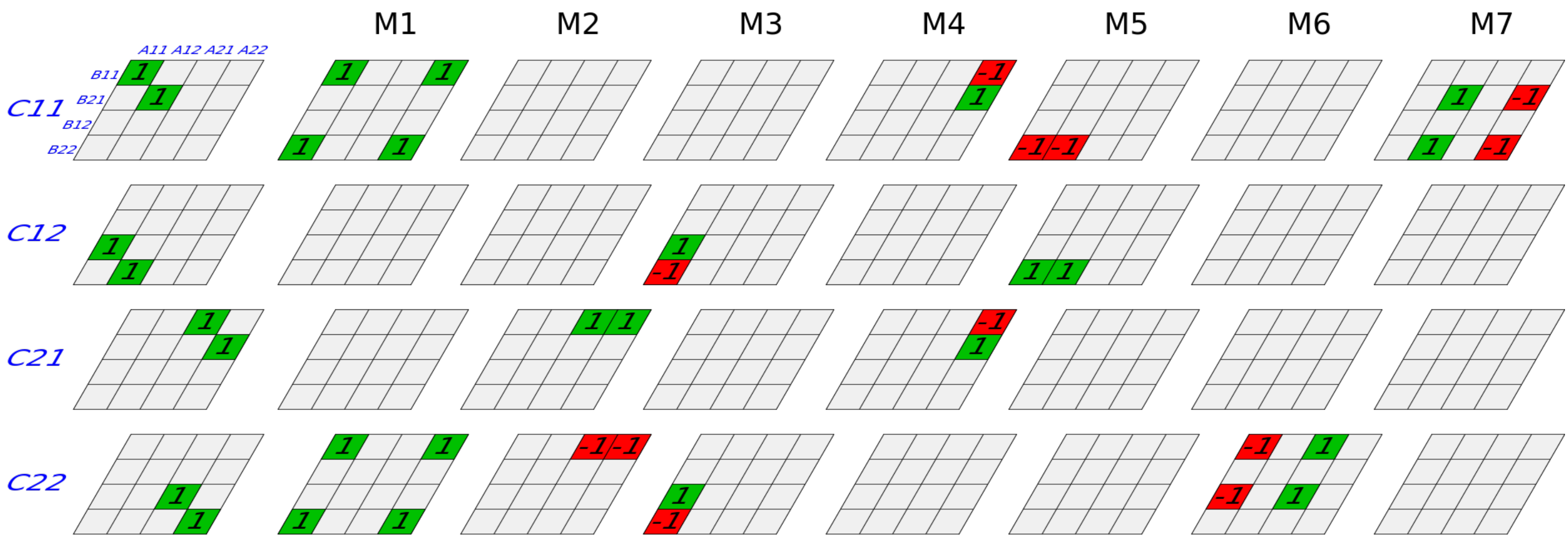
Strassenův algoritmus pro násobení matic ('69)

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_{11} & B_{21} \\ B_{12} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} \\ C_{12} & C_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
M_1 &= (A_{11} + A_{22})(B_{11} + B_{22}); \\
M_2 &= (A_{21} + A_{22})B_{11}; \\
M_3 &= A_{11}(B_{12} - B_{22}); \\
M_4 &= A_{22}(B_{21} - B_{11}); \\
M_5 &= (A_{11} + A_{12})B_{22}; \\
M_6 &= (A_{21} - A_{11})(B_{11} + B_{12}); \\
M_7 &= (A_{12} - A_{22})(B_{21} + B_{22}),
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 + M_4 - M_5 + M_7 & M_3 + M_5 \\ M_2 + M_4 & M_1 - M_2 + M_3 + M_6 \end{bmatrix}$$

Zdroj obrázků: Wikimedia Commons, autor Cyp



Strassenův algoritmus pro násobení matic ('69)

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_{11} & B_{21} \\ B_{12} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} \\ C_{12} & C_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
M_1 &= (A_{11} + A_{22})(B_{11} + B_{22}); \\
M_2 &= (A_{21} + A_{22})B_{11}; \\
M_3 &= A_{11}(B_{12} - B_{22}); \\
M_4 &= A_{22}(B_{21} - B_{11}); \\
M_5 &= (A_{11} + A_{12})B_{22}; \\
M_6 &= (A_{21} - A_{11})(B_{11} + B_{12}); \\
M_7 &= (A_{12} - A_{22})(B_{21} + B_{22}),
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 + M_4 - M_5 + M_7 & M_3 + M_5 \\ M_2 + M_4 & M_1 - M_2 + M_3 + M_6 \end{bmatrix}$$

Zdroj obrázků: Wikimedia Commons, autor Cyp

Konstanta ω: maticové násobení v čase $O(n^\omega)$ pro co nejmenší ω

- $\omega = \log_2 7 \approx 2.807$ [Strassen '69]

Strassenův algoritmus pro násobení matic ('69)

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_{11} & B_{21} \\ B_{12} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} \\ C_{12} & C_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
M_1 &= (A_{11} + A_{22})(B_{11} + B_{22}); \\
M_2 &= (A_{21} + A_{22})B_{11}; \\
M_3 &= A_{11}(B_{12} - B_{22}); \\
M_4 &= A_{22}(B_{21} - B_{11}); \\
M_5 &= (A_{11} + A_{12})B_{22}; \\
M_6 &= (A_{21} - A_{11})(B_{11} + B_{12}); \\
M_7 &= (A_{12} - A_{22})(B_{21} + B_{22}),
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 + M_4 - M_5 + M_7 & M_3 + M_5 \\ M_2 + M_4 & M_1 - M_2 + M_3 + M_6 \end{bmatrix}$$

Zdroj obrázků: Wikimedia Commons, autor Cyp

Konstanta ω: maticové násobení v čase $O(n^{\omega})$ pro co nejmenší ω

- $\omega = \log_2 7 \approx 2.807$ [Strassen '69]
- ...
- $\omega < 2.37287$ [Le Gall '14]
- $\omega < 2.3728\mathbf{6}$ [Alman & Vassilevska Williams ('21)]
- hypotéza: $\forall \varepsilon > 0 : \omega < 2 + \varepsilon$

Dynamické programování

- Vyvinul Bellman v 50. letech

Dynamické programování

- Vyvinul Bellman v 50. letech

Kuchařka:

1. Máme rekurivní algoritmus, ale s exponenciální časovou složitostí
   - např. pomocí Rozděl a panuj
2. Pozorování: probíhá mnoho opakovaných výpočtů pro stejné podprobl
3. Řešení: pořídíme si tabulku na ukládání řešení podproblémů
   - kešování / memoizace
4. Často lze odstranit rekurzi iterativním algoritmem

Dynamické programování

- Vyvinul Bellman v 50. letech

Kuchařka:

1. Máme rekurivní algoritmus, ale s exponenciální časovou složitostí
   - např. pomocí Rozděl a panuj
2. Pozorování: probíhá mnoho opakovaných výpočtů pro stejné podprobl
3. Řešení: pořídíme si tabulku na ukládání řešení podproblémů
   - kešování / memoizace
4. Často lze odstranit rekurzi iterativním algoritmem

Příklady:

- Fibonacciho čísla
- Editační vzdálenost
- Nejdelší rostoucí podposloupnost
- Nejdelší společná podposloupnost
- Optimální vyhledávací stromy
- ... (viz cvičení)

Nejdelší rostoucí podposloupnost (RPP) (opakování)

- Dána posloupnost čísel $x_1, \ldots, x_n$

Nejdelší rostoucí podposloupnost (RPP) (opakování)

- Dána posloupnost čísel $x_1, \ldots, x_n$
- $r(i) =$ maximální délka RPP začínající x_i

Nejdelší rostoucí podposloupnost (RPP) (opakování)

- Dána posloupnost čísel $x_1, \ldots, x_n$
- $r(i) =$ maximální délka RPP začínající x_i

```
function RPPRec(i)
    d ← 1
    for all j = i+1, ..., n do
        if x_j > x_i then
            d ← max(d, RPPrec(j) + 1)
    return d
```

Nejdelší rostoucí podposloupnost (RPP) (opakování)

- Dána posloupnost čísel $x_1, \ldots, x_n$
- $r(i)$ = maximální délka RPP začínající x_i

function $\textsc{RPPRec}(i)$
  $d \leftarrow 1$
  if $A[i] > 0$ **then**
    return $A[i]$
  for all $j = i+1, \ldots, n$ **do**
    if $x_j > x_i$ **then**
      $d \leftarrow \max(d, \mathrm{RPPrec}(j) + 1)$
  $A[i] \leftarrow d$
  return d

Nejdelší rostoucí podposloupnost (RPP) (opakování)

- Dána posloupnost čísel $x_1, \ldots, x_n$
- $r(i)$ = maximální délka RPP začínající x_i

```
function RPPRec(i)
    d ← 1
    if A[i] > 0 then
        return A[i]
    for all j = i + 1, ..., n do
        if x_j > x_i then
            d ← max(d, RPPrec(j) + 1)
    A[i] ← d
    return d
```

```
function RPPIter(x_1, ..., x_n)
    x_0 ← −∞
    for all i = n, n − 1, ..., 0 do
        A[i] ← 1
        for all j = i + 1, ..., n do
            if x_i < x_j & A[i] < 1 + A[j] then
                A[i] ← 1 + A[j]
    return A[0] − 1        ▷ délka nejdelší RPP
```

Optimální binární vyhledávací stromy (OptBVS)

Dána statická množina klíčů $k_1 < k_2 < \cdots k_n$ s váhami $w_1, \ldots, w_n$

Cíl: najít BVS T s minimální cenou

- Cena $T = \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot h_i(T)$, kde $h_i(T) \geq 1$ je hloubka klíče k_i v T

Optimální binární vyhledávací stromy (OptBVS)

Dána statická množina klíčů $k_1 < k_2 < \cdots k_n$ s váhami $w_1, \ldots, w_n$

Cíl: najít BVS T s minimální cenou

- Cena $T = \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot h_i(T)$, kde $h_i(T) \geq 1$ je hloubka klíče k_i v T
- Lze vyřešit v čase $\Theta(n^2)$ [Knuth '71]
  - Nechť $K[i,j] \in [i,j]$ je kořen OptBVS pro $k_i, \ldots, k_j$
  - Platí: $K[i,j-1] \leq K[i,j] \leq K[i+1,j]$
- $\Theta(n \log n)$ [Hu & Tucker '71]

Optimální binární vyhledávací stromy (OptBVS)

Dána statická množina klíčů $k_1 < k_2 < \cdots k_n$ s váhami $w_1, \ldots, w_n$

Cíl: najít BVS T s minimální cenou

- Cena $T = \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot h_i(T)$, kde $h_i(T) \geq 1$ je hloubka klíče k_i v T
- Lze vyřešit v čase $\Theta(n^2)$ [Knuth '71]
  - Nechť $K[i,j] \in [i,j]$ je kořen OptBVS pro $k_i, \ldots, k_j$
  - Platí: $K[i,j-1] \leq K[i,j] \leq K[i+1,j]$
- $\Theta(n \log n)$ [Hu & Tucker '71]

Dynamické programování: obecný princip

máme systém podproblémů:

- je jich omezeně mnoho (polynomiálně)
- závislosti tvoří DAG $\Rightarrow$ lze je procházet v topologickém pořadí

Optimální binární vyhledávací stromy (OptBVS)

Dána statická množina klíčů $k_1 < k_2 < \cdots k_n$ s váhami $w_1, \ldots, w_n$

Cíl: najít BVS T s minimální cenou

- Cena $T = \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot h_i(T)$, kde $h_i(T) \geq 1$ je hloubka klíče k_i v T
- Lze vyřešit v čase $\Theta(n^2)$ [Knuth '71]
  - Nechť $K[i,j] \in [i,j]$ je kořen OptBVS pro $k_i, \ldots, k_j$
  - Platí: $K[i,j-1] \leq K[i,j] \leq K[i+1,j]$
- $\Theta(n \log n)$ [Hu & Tucker '71]

Dynamické programování: obecný princip

máme systém podproblémů:

- je jich omezeně mnoho (polynomiálně)
- závislosti tvoří DAG $\Rightarrow$ lze je procházet v topologickém pořadí
- nutná podmínka: vlastnost optimální podstruktury
  - optimální řešení poskládáno z optimálních řešení podproblémů

Pravděpodobnostní algoritmy

Mají přístup k náhodným bitům

- Umíme vygenerovat rovnoměrně náhodné číslo z $\{0, \ldots, n\}$
- Časová složitost nebo výstup algoritmu jsou náhodné proměnné
- Příklad: QuickSelect a QuickSort s náhodnou volbou pivota
- Algoritmus je deterministický, pokud nepoužívá náhodné bity

Pravděpodobnostní algoritmy

Mají přístup k náhodným bitům

- Umíme vygenerovat rovnoměrně náhodné číslo z $\{0, \ldots, n\}$
- Časová složitost nebo výstup algoritmu jsou náhodné proměnné
- Příklad: QuickSelect a QuickSort s náhodnou volbou pivota
- Algoritmus je deterministický, pokud nepoužívá náhodné bity

Náhodné vstupy (stochastické)

- předpokládáme, že vstup je generován nějakou distribucí

Příklad: QuickSelect a QuickSort na náhodných vstupech

- vstup je náhodná permutace $\{1, \ldots, n\}$
- střední hodnota časové složitosti jako při náhodné volbě pivota
  - i při pevné volbě pivota, např. $x_{\lceil n/2 \rceil}$
- „průměrná složitost přes všechny vstupy“

Dolní odhady na třídění

Triviální: $\Omega(n)$

Lze třídit v $O(n)$:

- polynomiálně velká čísla: $x_i \leq n^c$ pro pevné c — RadixSort / číslicové třídění
- řetězce lexikograficky, pokud je abeceda konstantně velká

Dolní odhady na třídění

Triviální: $\Omega(n)$

Lze třídit v $O(n)$:

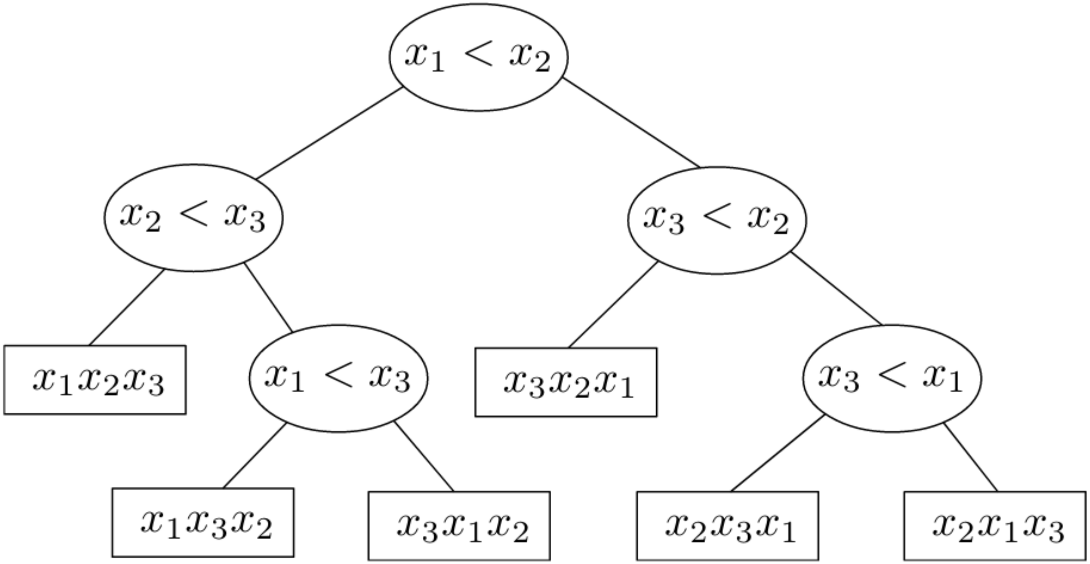
- polynomiálně velká čísla: $x_i \leq n^c$ pro pevné c — RadixSort / číslicové třídění
- řetězce lexikograficky, pokud je abeceda konstantně velká

Porovnávací model

- Prvky na vstupu lze pouze porovnat: pro jednoduchost jen $<$ a $=$
  - nejsou povoleny jiné operace s prvky, např. zápis čísla v soustavě s velkým základem
  - přesouvání/kopírování prvků v paměti povoleno
- Příklady:
  - InsertSort, BubbleSort: $\Theta(n^2)$
  - MergeSort, HeapSort: $\Theta(n \log n)$
  - QuickSort: $\Theta(n \log n)$ v průměru

Jde to lépe?

Příklad rozhodovacího strom pro třídění



Obrázek 3.1: Příklad rozhodovacího stromu pro 3 prvky