9. cvičení z PSt — 17.4.2025

Distribuční funkce a nezávislost

1. Nechť $X_i \sim Exp(\lambda_i)$ pro $i = 1, \dots, n$ jsou nezávislé náhodné veličiny. Označme $M = \min(X_1, \dots, X_n)$. Ukažte, že $M \sim Exp(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)$.

2. Buď Y maximum z n uniformně náhodných čísel z intervalu $[0, 1]$.

(a) Najděte distribuční funkci F_Y.

(b) Odsud určete hustotu f_Y.

(c) Spočtěte $\mathbb{E}(Y)$.

(d) Jak je to pro minimum těch čísel?

(e) * A co pro k-té nejmenší číslo?

Sdružená hustota

3. Nechť X, Y mají sdruženou hustotu $f_{X,Y}(x, y) = e^{-x-y}$ pro $x, y > 0$ (a 0 jinak).

(a) Určete marginální hustoty f_X, f_Y.

(b) Určete také distribuční funkce F_X, F_Y, $F_{X,Y}$.

(c) Jsou X, Y nezávislé?

(d) Najděte $P(X + Y \leq 1)$ a $P(X > Y)$.

4. (Buffonova jehla) Na nekonečnou podlahu hodíme náhodně jehlu délky ℓ. Podlaha je z prken, jejichž okraje tvoří rovnoběžné přímky ve vzdálenosti $d \geq \ell$. Určete pravděpodobnost, že jehla bude přesahovat okraj některého prkna.

Celková pravděpodobnost

5. Pro n.n.v. $X \sim U(0, 2)$ a $Y \sim U(0, 1)$ zkoumáme $P(X < Y)$. Řešte

(a) Přímo z obrázku.

(b) Rozborem možností n.v. Y pomocí vzorce (analogie věty o celkové pravděpodobnosti)

$$P(X < Y) = \int_0^1 f_Y(y) P(X < Y \mid Y = y) dy.$$

(c) Rozborem možností n.v. X pomocí vzorce

$$P(X < Y) = \int_0^2 f_X(x) P(X < Y \mid X = x) dx.$$

Konvoluce

6. Buďte $X, Y, Z \sim U(0, 1)$ nezávislé náhodné veličiny.

(a) Jaké je rozdělení $X + Y$? Určete hustotu (dvěma způsoby) – podle konvolučního vzorce i „podle obrázku“.

(b) Jaké je rozdělení $X + Y + Z$? Pro jednoduchost určete hustotní funkci jen na intervalu $[0, 1]$.

(c) Jak výsledek ověřit samplováním?

7. Buďte $X, Y, Z \sim Exp(\lambda)$ nezávislé náhodně veličiny.

(a) Jaké je rozdělení $X + Y$? (b) Jaké je rozdělení $X + Y + Z$?

Nápověda

1: Vyjádřete $P(M > m)$ pomocí $P(X_i > m)$ pro $i = 1, \ldots, n$.

2: a) Jaká je distribuční funkce Y pomocí distribučních fcí těch uniformně náhodných čísel? b) $f = F'$

3d: Jedna část je lehká. Pro druhou nakreslete, přes jakou množinu se má integrovat. Pak případně vyjádřete jako dvojný integrál se správně zapsanými mezemi. Pokud zvládnete to, zbytek je lehký.

4: Nakreslete obrázek a popište polohu jehly pomocí dvou náhodných proměnných (posun a úhel).

6, 7: Použijte vzorec na konci další stránky.

K procvičení

1. Volme uniformně náhodně bod z polokruhu o poloměru 1, se středem v počátku a v horní polorovině. (Uniformně znamená, že pravděpodobnost každé podmnožiny je úměrná jejímu obsahu.) Označme X, Y souřadnice zvoleného bodu.

(a) Najděte sdruženou hustotu $f_{X,Y}$.
(b) Najděte marginální hustotu f_Y a spočtěte pomocí ní $\mathbb{E}(Y)$.
(c) Pro kontrolu spočtěte $\mathbb{E}(Y)$ přímo (pomocí pravidla PNS).

2. Metrový klacek rozlomíme na dva kusy – lomem v uniformně náhodném bodě. Buď D délka delší části.

(a) Jaké je rozdělení D? (b) Určete $\mathbb{E}(D)$.

Bonus

3. Metrový klacek zlomíme v uniformně náhodném bodě a ponecháme si levý kus. Jeho délku označíme Y. V něm opět vybereme uniformně náhodný bod, kde klacek zlomíme, a délku levého kusu označíme X.

(a) Najděte sdruženou hustotu $f_{X,Y}$. Může vám pomoci tzv. podmíněná hustota $f_{X|Y} = f_{X,Y}/f_Y$.
(b) Najděte marginální hustotu f_X.
(c) Pomocí f_X spočtěte $\mathbb{E}(X)$.
(d) Spočtěte $\mathbb{E}(X)$ pomocí vztahu $X = Y \cdot (X/Y)$.

Soupis vzorečků

- Vztah sdružené hustoty a sdružené distribuční funkce

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(s,t) dt ds$$
$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial x \partial y}$$

- Marginální hustota ze sdružené

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dy$$
$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dx$$

- pro „rozumnou“ množinu A platí $P((X,Y) \in A) = \int_A f_{X,Y}(x,y) dx dy$.
- **nezávislost:** $X \perp Y \iff F_{X,Y}(x,y) = F_X(x) F_Y(y) \iff f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$
- **PNS:** $\mathbb{E}(g(X)|B) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_{X|B}(x) dx$
- **Konvoluční vzorec:** Pro spojité nezávislé n.v. X, Y má veličina $Z = X + Y$ hustotu

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx.$$