

## 7. cvičení z PSt — 3.4.2025

Hurá na spojité funkce a integrály!

Připomeňte si, že distribuční funkce  $F_X$  je definována vztahem

$$F_X(x) = P(X \leq x).$$

Pokud je  $X$  spojitá, tak

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$$

pro nezápornou funkci  $f_X$  (hustotu  $X$ ). Pak je

$$P(X \in A) = \int_A f_X(t) dt, \quad \text{tedy zejména} \quad P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(t) dt$$

Platí také  $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$  a obecněji

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) f_X(t) dt.$$

Stejně jako pro diskrétní n.v. platí i zde, že  $\text{var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$ .

---

**1. Ještě k vektorům diskrétních n.v.:** Nezávislé n.v.  $X_1, \dots, X_n$  mají geometrické rozdělení s parametry  $p_1, \dots, p_n$ . Jaké je rozdělení n.v.

$M = \min(X_1, \dots, X_n)$ ?

**Používání  $F$  a  $f$**

**2.** Pro n.v.  $X$  s distribuční funkcí  $F_X$  vyjádřete

$$(a) P(X \in (0, 1]) \quad (b) P(X > 0) \quad (c) * P(X < 0) \quad (d) * P(X \in [0, 1])$$

**3.** Vyřešte předchozí část znovu, pro n.v.  $X$  s hustotou  $f_X$ .

**4.** Nechť  $X$  splňuje  $P(X = x) = 0$  pro každé  $x$ . (Rozmyslete si, že to není nic divného, a že se to děje pro každou spojitou náhodnou veličinu.)

Vyjádřete pomocí  $F_X$  distribuční funkci náhodných veličin

$$(a) -X. \quad (b) X^+ = \max(0, X), \quad (c) |X|.$$

**5.** Buď  $X$  náhodná veličina s hustotou  $f_X(t) = 1/t^2$  pro  $t \geq 1$  a  $f_X(t) = 0$  jinak.

(a) Ověřte, že se jedná o hustotu.

(b) Určete  $\mathbb{E}(X)$ .

(c) Spočtěte distribuční funkci  $F_X$ .

(d) Určete  $P(2 \leq X \leq 3)$ .

(e) Buď  $Y = 1/X$ . Jaká je distribuční funkce náhodné veličiny  $Y$ ?

(f) Určete hustotu náhodné veličiny  $Y$ .

**6.** Říkáme, že  $X$  má exponenciální rozdělení,  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ , pokud

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad \text{pro } x \geq 0, \text{ jinak } 0.$$

Nalezněte  $f_X$ . Na přednášce si ukážeme, že  $\mathbb{E}(X) = 1/\lambda$ .

**7.** Předpokládejme, že u poštovní přepážky trvá vyřízení jednoho zákazníka čas, který má exponenciální rozdělení a střední hodnotu 4 minuty.

(a) Jaký je parametr  $\lambda$ , jaká je distribuční funkce?

(b) Jaká je pravděpodobnost, že budeme čekat více než 4 minuty?

(c) Jaká je pravděpodobnost, že budeme čekat něco mezi 3 a 5 minutami?

## K procvičení

8. Necht'  $F_X$  je dána předpisem  $F_X(x) = x/3$  pro  $x \in [0, 3]$ ,  $F_X(x) = 0$  pro  $x < 0$  a  $F_X(x) = 1$  pro  $x > 3$ . Necht'  $Y = 1/X$  a  $Z = X^2$ . Spočtěte

- (a)  $P(1 \leq X \leq 2)$       (b)  $P(X \leq Y)$       (c)  $P(X \leq Z)$       (d) hustotní funkci  $f_X$ .  
(e) distribuční funkce  $F_Y$  a  $F_Z$ .

9. Střední doba života harddisku je 4 roky. Přepokládejme, že tato doba je popsána náhodnou veličinou s exponenciálním rozdělením. (To není realistický předpoklad, viz např. <https://www.backblaze.com/blog/how-long-do-disk-drives-last/>.)

- (a) Jaká je pravděpodobnost, že disk selže během prvních tří let?  
(b) Jaká je pravděpodobnost, že vydrží alespoň 10 let?  
(c) Po jaké době se rozbije 10 % disků?

10. Plutonium-238 má poločas rozpadu 87.7 let. Jeho rozpad budeme modelovat pomocí exponenciálního rozdělení: pro každý atom budeme čas, za který se rozpadne, považovat za nezávislou náhodnou veličinu s rozdělením  $Exp(\lambda)$ .

- (a) Jaké je  $\lambda$ ?  
(b) Jaká je střední doba života atomu plutonia-238?  
(c) Po jaké době se rozpadne 90 % atomů?  
(d) Kolik procent atomů se rozpadne po 50 letech? (Některé kardiostimulátory používají plutonium-238 jako zdroj energie. [https://en.wikipedia.org/wiki/Plutonium-238#Nuclear\\_powered\\_pacemakers](https://en.wikipedia.org/wiki/Plutonium-238#Nuclear_powered_pacemakers))

11. Doba, za kterou uvidíme meteor, je exponenciálně rozdělená se střední hodnotou 1 (minuta).

- (a) Jaká je pravděpodobnost, že budeme muset čekat více než 5 minut?  
(b) Jaká je pravděpodobnost, že se dočkáme za nejvýše jednu minutu?  
(c) \* Jaké je rozdělení času, kdy uvidíme druhý meteor? Třetí, ... (Předpokládáme, že jednotlivé meteory jsou navzájem nezávislé.)