6. cvičení z PSt — 27.3.2025

Rozptyl a vektory diskrétních náhodných veličin

Název	Pravděpodobnostní funkce	Rozsah (ImX)	Střední hodnota	Rozptyl
Bernoulliho Ber(p)	$p_X(1) = p$, $p_X(0) = 1 - p$	$\{0, 1\}$	p	$p(1-p)$
Binomické Bin(n,p)	$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	$\{0, 1, \ldots, n\}$	np	$np(1-p)$
Geometrické Geo(p)	$p_X(k) = (1-p)^{k-1} p$	$\{1, 2, \ldots\}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Poissonovo Poi(λ)	$p_X(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$	$\{0, 1, \ldots\}$	λ	λ
Uniformní Unif(a,b)	$p_X(k) = \frac{1}{b-a+1}$	$\{a, a+1, \ldots, b\}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a+1)^2-1}{12}$

- definice $\text{var}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)$
- věta $\text{var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$
- věta $\text{var}(aX + b) = a^2 \text{var}(X)$
- věta $\text{var}(X + Y) = \text{var}(X) + \text{var}(Y)$ (pokud $X \perp Y$)
- odvozené veličiny: směrodatná odchylka $\sigma_X = \sqrt{\text{var}(X)}$
- variační koeficient $CV_X = \sigma_X / \mathbb{E}(X)$ (pokud $\mathbb{E}(X) > 0$)

1. Historická data ukazují, že náš server obdrží průměrně 30 žádostí za minutu. Použijte Poissonovo rozdělení k určení pravděpodobnosti, že server obdrží přesně 40 žádostí v následující minutě.

2. Nechť $X \sim Bin(100, 0.5)$, $Y = 10X$ a $Z \sim 10Bin(100, .05)$ (tedy $Z/10$ má binomické rozdělení $Bin(100, .05)$). Spočtěte (využitím vzorců z přednášky) $\mathbb{E}(X)$, $\text{var}(X)$, σ_X, CV_X a totéž pro Y, Z.

3. Nechť $X \sim Poi(\lambda)$. Připomeňte si odvození $\mathbb{E}(X) = \lambda$. Odvoďte obdobně $\text{var}(X) = \lambda$. [Návod: je užitečné napřed spočíst $\mathbb{E}(X(X-1))$.]

Náhodné vektory:

Sdružená pravděpodobnostní funkce je definována vztahem $p_{X,Y}(x, y) = P(X = x \,\&\, Y = y)$. „Jednorozměrné funkce“ p_X, p_Y se v tomto kontextu nazývají marginální pravděpodobnostní funkce. Připomeňte si, jak je zjistit z $p_{X,Y}$.

4. Označme X, Y výsledky dvou nezávislých hodů čtyřstěnnou kostkou (s čísly 1, …, 4).

(a) Jaká je pravděpodobnostní funkce $Z_1 = \max(X, Y)$?

(b) Jaká je pravděpodobnostní funkce $Z_2 = X + Y$?

(c) Jaká je pravděpodobnostní funkce $Z_3 = XY$?

[Nápověda: Jakých hodnot nabývá vektor (X, Y), pokud $\max(X, Y) = k$? Resp. v dalších částech, pokud $X + Y = k$, resp. $XY = k$?]

5. (a) V předchozím příkladu: je větší $\mathbb{E}(Z_2)$ nebo $\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$? Spočtěte obojí podle definice.

(b) V předchozím příkladu: je větší $\mathbb{E}(Z_3)$ nebo $\mathbb{E}(X^2)$? Spočtěte obojí podle definice.

6. Nezávislé n.v. X_1, …, X_n mají geometrické rozdělení s parametry p_1, …, p_n. Jaké je rozdělení n.v.
$M = \min(X_1, \ldots, X_n)$?

K procvičení

$x \backslash y$	0	1	2
0	1/4	1/6	1/12
1	1/6	1/4	1/12

7. V tabulce je sdružená pravděpodobnostní funkce náhodných veličin X, Y. Jiné než vyznačené hodnoty tyto veličiny nenabývají.

(a) Najděte marginální rozdělení X i Y. Spočtěte $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$.

(b) Jsou X a Y nezávislé? Neboli: platí $p_{X,Y}(x,y) = p_X(x)p_Y(y)$?

(c) Popište rozdělení $X + Y$ – tj. nalezněte pravděpodobnostní funkci n.v. $X+Y$. Spočtěte odsud $\mathbb{E}(X+Y)$ – ověřte, zda se to rovná $\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$.

(d) Popište rozdělení $X \cdot Y$. Spočtěte odsud $\mathbb{E}(XY)$ – ověřte, zda se to rovná $\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

8. Hodíme třikrát mincí. Označíme X počet rubů v prvních dvou hodech a Y počet líců v posledních dvou hodech.

(a) Určete sdruženou pravděpodobnostní funkci $p_{X,Y}$ a také marginální pravděpodobnostní funkce p_X, p_Y.

(b) Jsou X a Y nezávislé?

(c) Určete $P(X < Y)$.

(d) Určete podmíněnou pravděpodobnostní funkci $p_{X|Y}$, tj. čísla $P(X = x \mid Y = y)$ pro všechny hodnoty x, y.

9. Na kostce padne číslo i s pravděpodobností p_i pro $i = 1, \dots, 6$. Hodíme n-krát a označíme X_i počet hodů, kdy padlo i. (a) Najděte sdruženou pravděpodobnostní funkci pro n.v. X_1, $\dots$, X_n.

(b) Jaké je marginální rozdělení, tj. rozdělení jednotlivých n.v. X_i?

Bonus

10. Uvažme skupinu m manželských párů (tj. celkem $2m$ osob). Předpokládejme, že po deseti letech bude každý z těch $2m$ lidí stále naživu s pravděpodobností p, nezávisle na ostatních. Možnosti rozvodů apod. neuvažujeme, tj. páry jsou neměnné.

Označme L množinu lidí, kteří budou po deseti letech naživu a A jejich počet (tj. $A = |L|$). Dále buď B počet párů, kde budou naživu oba; tj. A, B jsou náhodné veličiny splňující $0 \le A \le 2m$ a $0 \le B \le m$. Pro každé $a = 0, \dots, 2m$ určete $\mathbb{E}(B \mid A = a)$.