4. cvičení z PSt — 13.3.2025

Diskrétní náhodné veličiny

- *Náhodná veličina* je přiřazení reálného čísla každému výsledku náhodného experimentu, neboli je to zobrazení $X : \Omega \to \mathbb{R}$.
- Střední hodnota $\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in Im(X)} x \cdot P(X = x)$

Název	Značení	Pravděpodobnostní funkce	Rozsah (ImX)	$\mathbb{E}(X)$
Bernoulliho	$X \sim \text{Ber}(p)$	$p_X(1) = p$, $p_X(0) = 1 - p$	$\{0, 1\}$	p
Binomické	$X \sim \text{Bin}(n, p)$	$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	$\{0, 1, \dots, n\}$	np
Geometrické	$X \sim \text{Geo}(p)$	$p_X(k) = (1-p)^{k-1} p$	$\{1, 2, \dots\}$	$\frac{1}{p}$
Poissonovo	$X \sim \text{Poi}(\lambda)$	$p_X(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$	$\{0, 1, \dots\}$	λ
Uniformní	$X \sim \text{Unif}(a, b)$	$p_X(k) = \frac{1}{b-a+1}$	$\{a, a+1, \dots, b\}$	$\frac{a+b}{2}$
Hypergeometrické	$X \sim \text{Hyper}(N, K, n)$	$p_X(k) =$ dozvíte se :)	$\{0, 1, \dots, \min(n, k)\}$	$n \frac{K}{N}$

1. Na kroužku máme pět klíčů, jeden z nich je správný, ale my nevíme jaký. Zkoušíme otevřít dveře.

(a) Po každém pokusu se nám kroužek vysmekne, a vybíráme vždy znovu náhodně.

(b) Vybíráme v náhodném pořadí, ale každý klíč jenom jednou (můžeme si je poznačit).

V obou případech zkoumáme, kolikátým pokusem dveře otevřeme. Jaké je rozdělení této náhodné veličiny, tj., jaká je pravděpodobnost, že dveře otevřeme k-tým pokusem. Jaká je její střední hodnota? (Použijte tabulku.)

(c) Jako část (a), ale správné jsou dva klíče z deseti.

(d) Jako část (b), ale správné jsou dva klíče z deseti. (Zde je určení střední hodnoty trochu těžší, stačí když určíte pravděpodobnostní funkci.)

2. Na přednášku je přihlášeno 234 lidí. Jaká je pravděpodobnost, že přesně jeden z nich má dnes narozeniny? Ignorujte přestupné roky, uvažujte, že všechny dny jsou stejně pravděpodobné pro narození.

(a) Použijte binomické rozdělení.

(b) Použijte aproximaci pomocí Poissonova rozdělení: $Bin(n, \lambda/n)$ je přibližně $Poi(\lambda)$.

(c) Co se změní, když budu uvažovat narozeniny zítra?

3. Nechť náhodná veličina X má Poissonovo rozdělení, $X \sim Poi(\lambda)$. Připomeňte si vzorec pro pravděpodobnostní funkci $p_X(k)$. Ukažte, že $p_X(k)$ je rostoucí pro $k \le \lfloor \lambda \rfloor$ a pak klesá, v limitě k nule.

4. (Kasino v St. Petersburgu) Házíme opakovaně mincí. Pokud poprvé padla panna v n-tém hodu, dostaneme za odměnu 2^n peněz. Jaká je střední hodnota odměny? Kolik byste byli ochotní zaplatit za účast v této hře? Jak hodnota výhry souvisí s geometrickým rozdělením Geo(1/2)?

5. Hodíme $(m+n)$-krát spravedlivou kostkou. Označme X počet šestek z prvních m hodů, Y počet šestek z posledních n hodů. Jaká je distribuce X, Y a $X + Y$? Jaké jsou jejich střední hodnoty? (Použijte tabulku.)

6. V pytlíku je N bonbónů, z nichž K je dobrých. Náhodně vytáhneme n z nich, označíme X počet dobrých vytažených bonbónů.

(a) Jak se jmenuje rozdělení n.v. X?

(b) Jaká je $P(X = k)$?

(c) Určete $\mathbb{E}(X)$ – pomocí tabulky. Pro $n = 1$ si rozmyslete, že je to jasné. (Bonus: dokažte vzorec pro $\mathbb{E}(X)$.)

Nezávislé náhodné veličiny

Definice: diskrétní n.v. X_1, X_2 jsou *nezávislé*, pokud jsou nezávislé jevy $\{X_1 = x_1\}$ a $\{X_2 = x_2\}$ pro každou dvojici čísel x_1, x_2.

7. Ukažte, že jevy A, B jsou nezávislé, právě když jsou nezávislé jejich indikátorové veličiny.

8. Ukažte, že pro diskrétní nezávislé n.v. X, Y platí

$$P(X \leq x \,\&\, Y \leq y) = P(X \leq x)P(Y \leq y).$$

Pro jednoduchost můžete předpokládat, že $Im(X) = Im(Y) = \{1, 2, \dots, n\}$ pro nějaké n.

Bonus

9. * Roztržitý matematik má v každé kapse krabičku s n zápalkami. Pokaždé, když potřebuje zápalku, tak ji vezme z náhodné kapsy. Když takhle najde prázdnou krabičku, označme X počet zápalek v druhé krabičce. Najděte pravděpodobnostní funkci náhodné veličiny X.

K procvičení

10. Na koš nezávisle hází n hráčů basketbalu. Při každém hodu má každý z nich pravděpodobnost p, že se trefí, nezávisle na ostatních. Označme X_i pořadí hodu, kterým se i-tý hráč poprvé trefí. Označme dále $X = \min(X_1, \dots, X_n)$.

(a) Jaká je distribuce X_1, X_2, …?

(b) Jaká je distribuce X?

11. Označme X počet meteorů, které uvidíte během hodinového pozorování noční oblohy. Jaké rozdělení použijete pro popis X?