3. cvičení z PSt — 6.3.2025

Nezávislé jevy

Buď I libovolná množina indexů. Jevy $\{A_i : i \in I\}$ nazveme *nezávislé (independent)*, pokud pro každou konečnou množinu $J \subseteq I$

$$P(\bigcap_{j\in J} A_j) = \prod_{j\in J} P(A_j).$$

Pokud podmínka platí jen pro dvouprvkové množiny J, nazýváme jevy $\{A_i : i \in I\}$ *po dvou nezávislé (pairwise independent).*

1. Dva hody mincí modelujeme uniformním prostorem $\Omega = \{PP, PO, OP, OO\}$. Ověřte, že jev A_1 „první hod byla panna“ a A_2 „druhý hod byla panna“ jsou nezávislé podle definice výše.

2. (pokračování) Máme opět pravděpodobnostní prostor se čtyřmi elementárními jevy $\{PP, PO, OP, OO\}$, ale tentokrát není uniformní. Jako v předchozím příkladu, jev A_1 je „první písmeno je P“ a jev A_2 je „druhé písmeno je P“. Předpokládáme, že $P(A_1) = p_1$, $P(A_2) = p_2$ a že jevy A_1 a A_2 jsou nezávislé. Ověřte, že tím je určena pravděpodobnost každého jevu v tomto pravděpodobnostním prostoru.

3. Pokud jsou jevy A, B nezávislé, tak jsou nezávislé i jevy A, B^c. A také jevy A^c, B^c. (Připomenutí: $A^c = \Omega \setminus A$.)

4. (a) Mohou být jevy A, B nezávislé a zároveň disjunktní?
(b) Mohou být jevy A, B nezávislé a zároveň $A \subseteq B$?

5. Najděte jevy A, B, C (na libovolném pravděpodobnostním prostoru), které
(a) jsou nezávislé.
(b) nejsou po dvou nezávislé, ale $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$.
(c) jsou po dvou nezávislé, ale $P(A \cap B \cap C) \neq P(A)P(B)P(C)$.

Úvod do náhodných veličin

6. Prokop hází basketbalovým míčem na koš, v každém pokusu má pravděpodobnost zásahu $p = 1/10$, pokusy jsou nezávislé. Skončí po prvním zásahu. Označme X celkový počet hodů.
(a) Jaká je $P(X > k)$? (Zkuste napřed pro $k = 1$, $k = 2$.)
(b) Jaká je $P(X = k)$? (Určení těchto čísel se nazývá popis distribuce X.)
(c) Jaká je $P(X \geq 10 \mid X \geq 5)$?

7. Pokračování z minulé úlohy: označme $Y = X \bmod 2$, tj. $Y = 0$, pokud je X sudé, jinak $Y = 1$. Určete distribuci Y.

8. Quido také hází míčem na koš, má pravděpodobnost p, že se trefí a také jsou hody nezávislé. Označme Z počet zásahů z n pokusů. Určete distribuci Z (tj. $P(Z = k)$ pro všechna k).

9. Hodíme dvěma kostkami – pro jednoduchost čtyřstěnnými, s čísly $1, \ldots, 4$. Označíme X maximum ze dvou hozených čísel. Popište, jak budete tuto situaci modelovat: co bude Ω, co přesně za matematický objekt je X, jaká je p_X.

Bonusy

10. Pokud vidíme bílého pudla, zvyšuje to naši důvěru, že je každá vrána černá?

11. Najdete náhodné jevy A, B, C takové, že

- A, B jsou nezávislé za podmínky C, tj. $P(A \cap B \mid C) = P(A \mid C)P(B \mid C)$,
- A, B jsou nezávislé za podmínky C^c,
- ale A, B nejsou nezávislé?

12. (Kasino v St. Petersburgu) Házíme opakovaně mincí. Pokud poprvé padla panna v n-tém hodu, dostaneme odměnu 2^n. Kolik byste byli ochotní zaplatit za účast v této hře?

K procvičení

13. V truhle je sto mincí. Z nich 99 je normálních, ale jedna má na obou stranách orla. Vytáhneme náhodnou minci a šestkrát s ní hodíme, pokaždé padne orel. Jaká je pravděpodobnost, že jsme si vytáhli „dvouorlovou“ minci? (Zkuste napřed odhadnout, pak spočítat.)

14. Na chorobu C máme dva testy, A a B. Test A má sensitivitu i specificitu $p = 0.95$. Test B vždy řekne, že pacient je zdravý. Předpokládejte, že $P(C) = 0.01$.

(a) Spočtěte pro oba testy pravděpodobnost úspěchu (tj. správné odpovědi), použijeme-li je na náhodného pacienta. Rozmyslete si, co to říká o užitečnosti obou testů.

(b) Pro jaké p je pravděpodobnost úspěchu obou testů stejná?

15. Ve volbách hlasují lidé pro dva kandidáty, A a B (v našem modelu se nikdo nezdrží hlasování). Při odchodu z volební místnosti jsou voliči náhodně požádáni o účast v exit-poll za účelem rychlého odhadu výsledků. Předpokládejme, že kdo odpoví, tak odpoví popravdě koho volil, ale ne všichni se zúčastní. Označme E množinu voličů, kteří jsou ochotní se exit-pollu zúčastnit, A a B množinu voličů příslušných kandidátů. Z dřívějších výzkumů víme, že voliči A jsou ochotnější se zúčastnit, předpokládejme $P(E \mid A) = 0.7$ a $P(E \mid B) = 0.4$. Výsledky exit-pollu jsou 60 % pro A. Jaký je skutečný podíl lidí, kteří hlasovali pro A? (Zkuste si napřed tipnout, než to spočítáte.)

16. Kouřovými signály přenášíme binární soubor. Je proto poměrně vysoká pravděpodobnost chyby u každého bitu: 0 se jako 0 přenese jen s pravděpodobností 0.9, 1 jako 1 jen s pravděpodobností 0.8. Předpokládejme (trochu neseriózně), že jednotlivé znaky se přenáší nezávisle. Dále předpokládejme, že ve vysílané zprávě je stejně nul a jedniček.

(a) Pokud jsme dostali signál 0, jaká je pravděpodobnost, že byl opravdu vyslán?

(b) Dostali jsme zprávu 0010. Jaká je pravděpodobnost, že byla opravdu vyslána?

(c) Jak se výpočet změní, pokud budeme pro kontrolu vysílat každý symbol třikrát (a pak vezmeme častější z těch tří pokusů)?