7. CVIČENÍ Z ÚVODU DO APROXIMACÍ

Zbytky: Po 3 nezávislé bity, paralelní algoritmy a/nebo párování algebraickými metodami

D: Množina náhodných proměnných $X_1, \dots X_n$ je *po k nezávislá*, jestliže pro každou podmnožinu $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ s $|I| \le k$ a pro každé hodnoty c_i, platí nezávislost pravděpodobností:

$$Pr[\bigwedge_{i \in I} (X_i = c_i)] = \prod_{i \in I} Pr[X_i = c_i].$$

PŘÍKLAD PRVNÍ Víme, že k plně nezávislých náhodných bitů stačí pro vygenerování $2^k - 1$ po dvou nezávislých náhodných bitů. Otázkou tedy je, kolik jich zvládneme vygenerovat, pokud mají být po *třech* nezávislé.

Překvapivě lze vygenerovat 2^{k-1} po třech nezávislých náhodných bitů. Zbývá ukázat jak.

Tip: Podobná konstrukce jako v prvním příkladu.

Paralelní algoritmy

PŘÍKLAD DRUHÝ Vymyslete deterministický paralelní algoritmus, který pro graf $G = (V, E)$ a danou množinu $X \subseteq V$ rozhodne v čase $O(\log |E|)$ a s $O(|E|)$ procesory, jestli X je maximální nezávislá množina (v inkluzi).

PŘÍKLAD TŘETÍ Definujme *maximální párování* (v inkluzi) v grafu jako takové párování, do kterého už nejde doplnit žádná hrana (bez mazání).

Navrhněte rychlý randomizovaný paralelní algoritmus, který najde maximální párování v grafu.

PŘÍKLAD ČTVRTÝ Navrhněte randomizovaný paralelní algoritmus, který vygeneruje uniformně náhodnou permutaci s n prvky. Konkrétně vymyslete algoritmus typu „Las Vegas“ – algoritmus se nesmí splést a jeho doba běhu je polylogaritmická ve střední hodnotě. Tento algoritmus se bude lišit od algoritmů z přednášky, takže ho vytvoříme po krocích:

a) Naše řešení staví na prostých funkcích. Nechť máme množiny $X = \{1, \dots n\}$ a $Y = \{1, \dots, m\}$, $m \ge n$. Jaká je pravděpodobnost, že uniformně náhodná funkce $f : X \to Y$ je prostá?
b) Předpokládejte, že jste dostali uniformně náhodnou prostou funkci $f : X \to Y$. Dokážete z ní udělat uniformně náhodnou permutaci?
c) Dokážete rychle otestovat, jestli je daná funkce $f : X \to Y$ prostá?
d) Nyní vše složte do výsledného algoritmu a vhodně dosaďte za m.

Perfect matchings

PŘÍKLAD PÁTÝ Dokažte, že hodnost Edmondsovy matice bipartitního grafu G je rovna velikost největšího párování v G.

Edmondsova matice bipartitního grafu $G = (U, V, E)$ s paritami $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$ a $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ (obě s n vrcholy) je definována jako matice polynomů B velikosti $n \times n$ takto:

$$B_{ij} = \begin{cases} x_{ij} & \text{if } (v_i, v_j) \in E \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Podobný výsledek platí pro obecné grafy: hodnost Tutteho matice grafu G je rovna *dvojnásobku* velikosti největšího párování v G.

Tutteho matice grafu $G = (V, E)$ s n vrcholy je definována jako matice polynomů T velikosti $n \times n$ takto:

$$T_{ij} = \begin{cases} x_{ij} & \text{if } (v_i, v_j) \in E, i < j \\ -x_{ji} & \text{if } (v_i, v_j) \in E, i > j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Matice je antisymetrická: $T_{ij} = x_{ij}$ a $T_{ji} = -x_{ij}$ pro $i < j$.