ÚVOD DO APROXIMACÍ – DÚ3

Deadline: neděle **4. 2. 2018 23:59 AoE**

Úkoly odevzdávejte nejlépe elektronicky (ve formátu PDF, ODT, ... nebo i jen jako text emailu). Naskenované či kvalitně vyfocené papíry jsou též přijímány, pokud lze vše přečíst bez problémů. Osobní odevzdání na papíře je též možné, když mě zastihnete v S320. Nebojte se napsat, pokud nějaké zadání není jasné nebo vám přijde, že v něm něco chybí.

První domácí úkol — **Paralelní hladové barvení grafu** **[5 bodů]**

Uvažme grafy s maximálním stupněm nejvýše Δ. Hladový algoritmus takové grafy snadno nabarví $\Delta + 1$ barvami, ale není vůbec jasné, jak ho paralelizovat. Navrhněte a zanalyzujte rychlý paralelní pravděpodobnostní algoritmus, který takový graf s velkou pravděpodobností správně obarví $\Delta + 1$ barvami.

Můžete předpokládat, že Δ je parametr algoritmu — všechny procesory tedy na začátku znají Δ. Nicméně, Δ může být tak velké jako počet vrcholů.

Tip: Může se hodit stavět na základech z přednášky.

Druhý domácí úkol — **Jednodušší skoro 2-univerzální hašovací funkce** **[5 bodů]**

Nechť n je celé číslo a $p \geq n$ je prvočíslo. Na cvičení jsme ukázali, že rodina

$$\mathcal{H} = \{h_{a,b} | 1 \leq a \leq p-1, 0 \leq b \leq p-1\},$$

kde $h_{a,b} = (ax + b \mod p) \mod n$, je (slabě) 2-univerzální.

Uvažme nyní hašovací funkce $h_a = (ax \mod p) \mod n$ a rodinu

$$\mathcal{H}' = \{h_a | 1 \leq a \leq p-1\}.$$

Najděte příklad, že tato rodina není 2-univerzální a pak dokažte, že $\mathcal{H}'$ je skoro 2-univerzální. Přesněji dokažte pro každé $x, y \in \{0, 1, \ldots, p-1\}, x \neq y$, že jestliže h je uniformně náhodná funkce z $\mathcal{H}'$ pak platí

$$\Pr[h(x) = h(y)] \leq \frac{2}{n}.$$

Třetí domácí úkol — **Dolní odhad pro silné 2-univerzální hašovací funkce pomocí LA** **[6 bodů]**

Silně 2-univerzální hašovací funkce jsou definovány z přednášky takto: Rodina funkcí $\mathcal{H}$ (kde všechny funkce jsou hašovací, čili $h\colon U \to HT$) je silně 2-univerzální, pokud pro libovolnou čtveřici $x, x' \neq x, y, y'$ platí:

$$P_{h \text{ náhodná z } \mathcal{H}}[h(x) = y \wedge h(x') = y'] = \frac{1}{|HT|^2}.$$

Na cvičení jsme si ukazovali, že pro každé $|U| = 2^n, |HT| = 2^m$ existuje slabě 2-univerzální rodina, ze které lze vybrat náhodnou funkci pomocí $O(m + n)$ náhodných bitů. Stejný fakt platí i pro silně 2-univerzální rodiny.

Naším cílem je ukázat asymptotickou těsnost daného odhadu; bude nám k tomu sloužit lineární algebra. Předpokládejme tedy, že máme libovolnou silně 2-univerzální hašovací rodinu $\mathcal{H}$.

1. Dokažte, že je-li $|U| \geq 2$, tak $|\mathcal{H}| \geq |HT|^2$.

2. Dokažte, že je-li $|HT| = 2$, tak $|\mathcal{H}| \geq |U| + 1$.

   Tip: Pomocí funkcí z $\mathcal{H}$ sestavte pro každé x jeden vektor v_x z $\mathbb{R}^{|\mathcal{H}|}$ se souřadnicemi jen ± 1 tak, aby každá dvojice v_x a $v_{x'}$ byla na sebe ortogonální. Co tato množina vektorů říká o dimenzi $\mathbb{R}^{|\mathcal{H}|}$? A proč je pravá strana $|U| + 1$ a ne jen $|U|$?

3. Zobecněte předchozí postup a dokažte, že pro obecnou velikost $|HT|$ platí

   $$|\mathcal{H}| \geq |U|(|HT| - 1) + 1.$$

   Tip: Pomocí funkcí z $\mathcal{H}$ sestavte pro každé x celkem $|HT| - 1$ vektorů $v_{x,y} \in \mathbb{R}^{|\mathcal{H}|}$ takových, že pro jedno x jsou všechny $v_{x,y}$ lineárně nezávislé, a pro dvě různá $x \neq x'$ a libovolné y, y' jsou vektory $v_{x,y}$ a $v_{x',y'}$ na sebe ortogonální. Co tato množina vektorů říká o dimenzi $\mathbb{R}^{|\mathcal{H}|}$?

4. Z předchozích bodů odvoďte, že pokud $|U| = 2^n$ a $|HT| = 2^m$, tak pro vygenerování náhodné funkce z $\mathcal{H}$ je potřeba alespoň $(\max(n, m) + m)$ bitů, což je asymptotický těsný dolní odhad.

Čtvrtý domácí úkol — **Problém k dodavatelů** — [5 bodů]

V metrickém Problému k dodavatelů máme na vstupu $m + n$ bodů, kde m z nich jsou předem označeni jako *dodavatelé* a zbylí jsou *zákazníci*. Mezi všemi těmito body je metrika (splňující trojúhelníkovou nerovnost). Úkolem v tomto problému je vybrat k dodavatelů tak, že minimalizujeme nejdelší vzdálenost mezi zákazníkem a jeho nejbližším vybraným dodavatelem.

Navrhněte a zanalyzujte 3-aproximační algoritmus pro Problém k dodavatelů.

Tip: Tento problém je podobný Problému k center, který byl na cvičení a jehož aproximace je popsána v knize Williamson, Shmoys, kapitola 2.2. (kniha je dostupná na internetu, odkaz najdete na stránkách cvičení).

Pátý domácí úkol — **Bonus: implementace aproximačního algoritmu na TSP** — [7 bodů]

Vyřešte první nebo druhý úkol z třetí série úkolů minulý rok: `http://iuuk.mff.cuni.cz/~bohm/16-17/apxintro/03-hw-en.pdf`. Tedy napište implementaci 2-aproximačního kostrového algoritmu pro TSP (za 4 body), nebo implementujte Christofidesův algoritmus (za 7 bodů).

Platí stejné podmínky jako loni (s výjimkou termínu a počtu bodů). Speciálně je tentokrát zakázána spolupráce na řešení.