ÚVOD DO APROXIMACÍ – DÚ2

Deadline: úterý **19. 12. 2017 23:59 AoE** (AoE znamená *Anywhere on Earth*, tedy kdekoliv na zemi; budete-li však úkol odesílat po půlnoci středoevropského času, napište, v jaké zemi je ještě před půlnocí výše zmíněného dne).

Úkoly odevzdávejte nejlépe elektronicky (ve formátu PDF, ODT, . . . nebo i jen jako text emailu). Naskenované či kvalitně vyfocené papíry jsou též přijímány, pokud lze vše přečíst bez problémů. Další možností je odevzdat řešení na papíře na začátku cvičení ten samý den. Nebojte se napsat, pokud nějaké zadání není jasné nebo vám přijde, že v něm něco chybí.

PRVNÍ DOMÁCÍ ÚKOL **Maximální k-řez** **[5 bodů]**

V problému MAXIMÁLNÍ k-ŘEZ dostaneme na vstupu neorientovaný graf G a váhy na hranách $w\colon E(G) \to \mathbb{R}^+$. Cílem je rozdělit všechny vrcholy grafu do k hromádek $V_1, V_2, \ldots, V_k$ tak, aby součet vah všech mezihromádkových hran byl co největší možný.

Navrhněte a zanalyzujte $\frac{k-1}{k}$-aproximační algoritmus pro MAXIMÁLNÍ k-ŘEZ, nejlépe deterministický. Za pravděpodobnostní algoritmus budou 3 body.

DRUHÝ DOMÁCÍ ÚKOL **Rozložení zátěže v síti Sonet** **[5 bodů]**

V tomto problému se počítačová síť skládá z kružnice na n vrcholech. K síti máme seznam požadavků, kde každý požadavek má určen zdrojový vrchol a cílový vrchol. Ke každému požadavku musí být přiřazena právě jedna z dvou možných cest mezi zdrojem a cílem (po směru nebo proti směru hodinových ručiček). Cílem je minimalizovat zátěž (počet použití) na nejvíce zatížené hraně.

Vytvořte 2-aproximační algoritmus.

Hint: zaokrouhlování řešení relaxace celočíselného programu.

TŘETÍ DOMÁCÍ ÚKOL **Paralelní řazení se spoustou procesorů** **[5 bodů]**

Seřaďte n čísel v paměti (každé zabírá jednu buňku) pomocí n^2 procesorů v čase $\mathcal{O}(\log n)$. Více procesorů může číst jednu paměťovou buňku, do jedné buňky však může zapisovat pouze jeden procesor v jednom čase.

Hint: máte dost procesorů, abyste mohli porovnat všechny dvojice čísel. Pravděpodobnost není potřeba, jde to deterministicky.

(Pro zajímavost: existuje pravděpodobnostní algoritmus pro seřazení n čísel v čase $\mathcal{O}(\log n)$ pomocí n procesorů.)

ČTVRTÝ DOMÁCÍ ÚKOL **Pozitivní SAT** **[6 bodů]**

Máme variantu problému splnitelnosti booleovských formulí v CNF, kde se proměnné vyskytují v klauzulích pouze pozitivně (nikde tedy není negace). Navíc každá klauzule i proměnná mají nezápornou váhu. Cílem je maximalizovat celkovou váhu splněných klauzulí plus celkovou váhu proměnných nastavených na 0 (tedy na *false*).

Použijte relaxaci celočíselného programu pro MAX SAT s náhodným zaokrouhlováním, v němž nastavíme i-tou proměnnou formule na 1 (*true*) s pravděpodobností $1 - \lambda + \lambda y_i^*$, kde $\lambda = 2(\sqrt{2} - 1) \approx 0.828$ a y_i^* je optimální hodnota pro i-tou proměnnou formule (přesněji: y^*, z^* je optimálním řešení relaxace, kde y jsou proměnné pro proměnné formule a z jsou proměnné pro klauzule). Ukažte, že takovéto zaokrouhlování vede k λ-aproximačnímu algoritmu.

Hint: Pro jakékoliv přirozené $k \geq 1$ můžete použít jako fakt, že funkce $f(x) = 1 - \lambda^k \left(1 - \frac{x}{k}\right)^k$ je konkávní, a také následující nerovnost (pro $k = 2$ je těsná a určuje optimální hodnotu λ)

$$1 - \lambda^k \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k \geq \lambda\,.$$