ÚVOD DO APROXIMACÍ – DÚ1

Deadline: pondělí **20. 11. 2017 15:39**. Úkoly odevzdávejte nejlépe elektronicky (ve formátu PDF, ODT, …nebo i jen jako text emailu). Naskenované či kvalitně vyfocené papíry jsou též přijímány, pokud lze vše přečíst bez problémů. Další možností je odevzdat řešení na papíře na začátku cvičení ten samý den. Nebojte se napsat, pokud nějaké zadání není jasné.

První domácí úkol — **Rozcvička se žetony** **[3 body]**

Máme deset žetonů s hodnotami 1 až 10. Když je rozdělíme na dvě skupiny zvlášť liché a zvlášť sudé, bude průměr skupin 5 pro liché a 6 pro sudé.

a) Je možné žetony přeuspořádat do dvou jiných skupin tak, že se průměr obou skupin ostře zvýší? Pokud ne, tak to zdůvodněte – a pokud ano, tak rozdělení ukažte.
b) Je možné žetony přeuspořádat do dvou jiných skupin tak, že průměr obou skupin bude větší než $5,5$?

Druhý domácí úkol — **Steinerův strom** **[5 bodů]**

V problému Steinerova stromu je dán souvislý neorientovaný graf $G = (V, E)$, ceny hran $c : E \to \mathbb{R}^+$ a množina terminálů $R \subseteq V$. Přípustným řešením je podmnožina hran $E' \subseteq E$ taková, že graf $G' = (V, E')$ má všechny terminály v jedné komponentě. Cílem je najít co nejlevnější takovou množinu hran E', čili $\min \sum_{e \in E'} c(e)$. Vaším úkolem je nalézt 2-aproximační algoritmus.

Hint: Začněte s variantou, kdy hrany grafu splňují trojúhelníkovou nerovnost (tedy, nejkratší cesta mezi vrcholy spojené hranou e je tato hrana e).

Třetí domácí úkol — **Rozvrhování na strojích s rychlostmi** **[6 bodů]**

Máme m strojů s rychlostmi $s_1 \geq s_2 \geq \cdots \geq s_m$, na které chceme rozvrhnout n úloh (tj. tak, aby se jeden stroj vždy zpracovával maximálně jednu úlohu), přičemž zpracování j-té úlohy na i-tém stroji trvá p_j/s_i času, kde p_j je délka úlohy. (Rozvrh vždy začíná v čase 0 a dvě úlohy samozřejmě nemohou běžet najednou na jednom stroji.)

O algoritmu běžícím v polynomiálním čase řekneme, že je ρ-relaxovaným rozhodovacím algoritmem, pokud navíc ke vstupu dostane číslo D a buď (I) vytvoří rozvrh takový, že všechny úlohy jsou splněné do času ρD, nebo (II) vrátí, že neexistuje žádný rozvrh, který stihne všechny úlohy do času D.

a) Nejprve ukažte, že existence ρ-relaxovaného rozhodovacího algoritmu implikuje existenci ρ-aproximačního algoritmu.
b) Dále dokažte, že následující algoritmus je 2-relaxovaný rozhodovací algoritmus: Nejprve pro každou úlohu j určíme její typ i, což bude číslo nejpomalejšího stroje, který stihne úlohu j do času D (tedy maximální i takové, že $p_j/s_i \leq D$). Pokud pro nějakou úlohu j neexistuje stroj, který ji stihne do času D (tedy $p_j/s_1 > D$), algoritmus ihned skončí s výstupem (II).

   Po určení typů začne stroj i zpracovávat úlohy typu i tak, že po skončení každé úlohy j pokračuje takto:
   - Pokud j skončí v čase D nebo později, stroj se zastaví a už nic nezpracovává.
   - Pokud není dostupná úloha stejného typu jako typ úlohy j (tj. není dokončená ani započatá), stroj začne zpracovávat úlohu následujícího dalšího typu (pro nějž už existuje dostupná úloha). Stroj i tedy nejdříve zpracovává úlohy typu i, pak typu $i + 1, i + 2, \ldots$
   - Jinak začne zpracovávat úlohu stejného typu jako úloha j.

   Pokud nejsou tímto způsobem rozvrženy všechny úlohy, skončí algoritmus s výstupem (II), jinak vrátí vytvořený rozvrh obsahující všechny úlohy.

ČTVRTÝ DOMÁCÍ ÚKOL **Hledání TSP instancí** **[6 bodů]**

a) Nalezněte nekonečnou třídu grafů, která dokazuje, že Christofidesův algoritmus pro metrické TSP není lepší než 3/2-aproximační.
Přesněji řečeno, pro nekonečně mnoho n zkonstruujte graf G_n s n vrcholy, aby platilo, že

$$\frac{\mathrm{ALG}(G_n)}{\mathrm{OPT}(G_n)} \to \frac{3}{2}$$

pro $n \to \infty$, kde $\mathrm{ALG}(G_n)$ je cena řešení algoritmu a $\mathrm{OPT}(G_n)$ cena optimálního řešení. Stejně jako na cvičení si můžete zvolit chování algoritmu tam, kde je více možností, např. pokud má graf více minimálních koster.

b) V asymetrickém TSP hledáme v *orientovaném* grafu nejkratší sled, který navštíví každý vrchol. Trojúhelníková nerovnost platí stále, *nemusí* však platit symetrie $d(u, v) = d(v, u)$. Ukažte, že kostrový algoritmus není použitelný na žádnou dobrou aproximaci (tj. není konstantně, ani třeba $\mathcal{O}(\log n)$-aproximační). Kostrový algoritmus počítá minimální kostru na grafu, v němž zapomeneme orientaci hran.
Hint: Najděte orientovaný graf, který má všechny hrany délky 1, až na k hran, jež jsou naopak velmi dlouhé. Optimální řešení použije pouze jednu dlouhou hranu, kdežto obcházení nějaké minimální kostry (a používání zkratek) použije všech k dlouhých hran. Jak dlouhé mohou být tyto dlouhé hrany? (Můžete samozřejmě použít i jiný přístup k řešení.)

PÁTÝ DOMÁCÍ ÚKOL **Bonusový příklad: kubické grafy bez mostů** **[5 bodů]**

Uvažujme kubický, hranově 2-souvislý graf G. (*Kubický* znamená, že graf má všechny stupně rovny 3, a *hranově 2-souvislý* znamená, že neobsahuje most, čili hranu, po jejímž smazání se stane nesouvislým.) Graf není ohodnocený, čili všechny hrany mají délku jedna.

1. Dokažte, že takovýto graf má TSP sled délky nejvýše $4|E|/3$.
2. Dokažte, že když uvážíme mnohostěn perfektních párování, tak bod $(1/3, 1/3, 1/3, \ldots, 1/3)$ vždy leží v mnohostěnu.

Mnohostěn perfektních párování vypadá takto (jde o množinu přípustných řešení následujícího lineárního programu):

$$\begin{aligned}
&\forall v \in V\colon && \sum_{e=vx} x_e = 1 \\
&\forall S \subsetneq V, S \neq \emptyset, |S| \text{ liché velikosti}\colon && \sum_{e \in E(S, V\setminus S)} x_e \geq 1 \\
&\forall e \in E\colon && x_e \geq 0
\end{aligned}$$

Jako fakt můžete použít, že tento mnohostěn je roven konvexnímu obalu (charakteristických vektorů) perfektních párování.