4. CVIČENÍ Z OPTIMALIZACE

Mnohostěny a jejich stěny

Příklady naleznete na zadní straně.

D: *Nadrovina* je libovolný afinní prostor v $\mathbb{R}^d$ dimenze $d-1$. V rovině tedy je každá přímka nadrovinou, v 3D prostoru je nadrovinou libovolná rovina, atd. Nadrovinu určuje rovnice $c^T x = b$.

Nadrovina rozděluje prostor $\mathbb{R}^d$ na dva *poloprostory*. Nadrovinu samotnou počítáme jako součást obou poloprostorů.

D: *Konvexní mnohostěn* je libovolný objekt v $\mathbb{R}^d$, který je průnikem konečně mnoha poloprostorů. Alternativně můžeme říci, že konvexní mnohostěn je libovolná množina bodů tvaru $\{x \mid Ax \leq b\}$ pro nějakou reálnou matici A a realný vektor b.

D: Nechť P je konvexní mnohostěn a $c \in \mathbb{R}^d, t \in \mathbb{R}$. Jestliže $\forall x \in P : c^T x \leq t$ a zároveň $\exists x \in P : c^T x = t$, označíme $\{x \mid c^T x = t\}$ jako *tečnou nadrovinu* n_i konvexního mnohostěnu P.

Průniky tečných nadrovin s mnohostěnem $S = n_i \cap P$ pak nazýváme *stěnami* mnohostěnu P. K nim také započítáváme dvě *nevlastní stěny* $\emptyset$ a P.

D: Stěny dimenze 0 nazýváme *vrcholy*. Stěny dimenze 1 nazýváme *hrany*. Stěny dimenze $d-1$ nazýváme *fasety*.

D: Řekneme, že konvexní mnohostěn je *omezený*, pokud se vejde do koule s konečně velkým poloměrem. Pro dobrou intuici si stačí představit, že mnohostěn neutíká do nekonečna.

D: d-dimenzionální křížový mnohostěn je konvexní obal všech bodů $\pm e_i$ (pro $i \in 1, \ldots, d$), kde $(e_i)_j = 1$, pokud $i = j$ a 0 jinak. (Tedy ve třech dimenzích jsou to body $(0,0,1)$, $(0,0,-1)$, $(0,1,0)$, $(0,-1,0)$, $(1,0,0)$ a $(-1,0,0)$.)

Ekvivalentně lze křížový mnohostěn napsat jako $\{x \in \mathbb{R}^n : |x_1| + |x_2| + |x_3| + \ldots + |x_n| \leq 1\}$

Příklad první   Kvíz na rozehřátí:

a) Jaký je počet stěn 3D krychle? (Odpověď není 6.)
b) Jaký je počet vrcholů a faset d-dimenzionální krychle, tedy $\mathrm{conv}(\{x | x \in \{0,1\}^d\})$?
c) Jaký je počet vrcholů a faset d-dimenzionálního křížového mnohostěnu?

Příklad druhý

a) Mohou se dvě dvoudimenzionální roviny (prostě klasické roviny) protínat v jednom bodě, pokud jsme v prostoru $\mathbb{R}^4$?
b) Jak může vypadat vzájemná poloha dvou rovin v $\mathbb{R}^4$?
c) Mohou se dva prostory dimenze 3 protínat v $\mathbb{R}^5$ v jednom bodě?

Příklad třetí   Vlastnosti polytopů:

- Uvažte váš oblíbený konvexní mnohostěn P a najděte dvě různé tečné nadroviny n_a, n_b, jejichž neprázdný průnik s P určuje tutéž stěnu.
- Mějme konvexní mnohostěn P. Dokažte, že průnik dvou stěn P je také stěna P.

Příklad čtvrtý   Rozhodněte, jestli vrchol $v = (1,1,1)$ je vrcholem mnohostěnu definovaného následujícím systémem nadrovin:

a

$$\begin{pmatrix} -1 & -6 & 1 \\ -1 & -2 & 7 \\ 0 & 3 & -10 \\ 1 & 6 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ -7 \\ 6 \end{pmatrix}$$

b

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Příklad pátý   Dokažte, že každý omezený konvexní mnohostěn dimenze d v $\mathbb{R}^d$ má alespoň $d+1$ vrcholů a alespoň $d+1$ faset.

Příklad šestý   Mějme mnohostěn $P = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1 \;\&\; x \leq 2\}$. Převeďte zápis jeho dvou nerovnicových podmínek do rovnicového tvaru a nakreslete mnohostěn z rovnicového tvaru (jeho prostoru vzroste dimenze).