1. CVIČENÍ Z OPTIMALIZACE

Naučíme se nový „programovací jazyk“: lineární nerovnice

PŘÍKLAD PRVNÍ Pekárna peče chleby, housky, bagety a koblihy.

- K upečení jednoho chleba potřebuje půl kila mouky, 10 vajec a 50 g soli.
- Na jednu housku je zapotřebí 150 g mouky, 2 vejce a 10 g soli.
- Na bagetu potřebuje 230 g mouky, 7 vajec a 15 g soli.
- Na jednu koblihu je třeba 100 g mouky a 1 vejce.

Pekárna má k dispozici 5 kilo mouky, 125 vajec a půl kila soli. Za jeden chleba získá pekárna 20 korun, za housku 2 koruny, za bagetu 10 korun a za koblihu 7 korun.

Pekárna se snaží vydělat co nejvíce. Jak ale zjistí kolik chlebů, housek, baget a koblih má upéci?

PŘÍKLAD DRUHÝ *Opakování lingebry:* Zjistěte, zda se vektor $v = (6, 5, -4)^T$ dá získat jako lineární kombinace vektorů $(4, 1, -2)^T, (2, 2, -1)^T, (3, 4, -1)^T$ nad tělesem $\mathbb{R}$ (koeficienty případné kombinace hledat nemusíte).

PŘÍKLAD TŘETÍ Vyřešte grafickou metodou následující systém nerovnic (čili LP):

$$
\begin{aligned}
-2x + 3y &\leq 3 \\
x + y &\leq 6 \\
-x + y &\geq -4 \\
x + 3y &\leq 12 \\
x &\geq 0 \\
y &\geq 0
\end{aligned}
$$

Pro účelové funkce:

a) max $x + y$
b) max $-3x + y$

Co se stane, když odebereme poslední dvě podmínky, tj. $x \geq 0, y \geq 0$?

PŘÍKLAD ČTVRTÝ Formulujte prokládání přímkou jako LP. Máme n bodů v rovině. Najděte přímku (resp. souřadnice přímky), která minimalizuje sumu vertikálních vzdáleností bodů od výsledné přímky. Vertikální vzdálenost je vzdálenost měřena pouze na ose y.

Pro jednoduchost předpokládejte, že výsledná přímka není kolmá na osu x.

PŘÍKLAD PÁTÝ Rozhodněte, zda lze a popř. jak:

1. Převést LP, které má všechny proměnné $x \in \mathbb{R}_0^+$, na LP s proměnnými $x' \in \mathbb{R}$ a naopak.
2. Převést LP s podmínkami ve tvaru nerovností a s proměnnými $x \in \mathbb{R}$ na LP, jehož podmínky jsou pouze rovnosti, ale proměnné jsou omezené (a naopak).
3. Převést úlohu LP bez účelové funkce na rovnicový tvar a vyřešit Gaussovou eliminací.

PŘÍKLAD ŠESTÝ Na vstupu máte seznam bodů (x_i, y_i) v rovině, každý je středem čtverce. Vymyslete LP, které najde délky stran čtverců tak, aby součet délek stran čtverců byl největší možný a zároveň se čtverce nepřekrývaly, tedy aby se žádný bod jednoho čtverce nenacházel uvnitř jiného čtverce (může být jen na jeho hranici).

Zkuste vymyslet triky na snížení počtu podmínek ve výsledném LP (třeba to v nejhorším případě nemusí pomoct, ale v „typickém“ případě bude mít LP výrazně méně podmínek).

Domácí úkoly

Deadline na odevzdání je začátek cvičení za 14 dní od zadání.

První domácí úkol **[2 body]**

Manufaktura vyrábí čtyři produkty, označené 1, 2, 3, 4. Každý produkt se vyrábí ve třech fázích označených A, B, C. Následující tabulka ukazuje zisk z jednoho produktu, kolik kusů daného produktu lze maximálně vyrobit za týden a kolik hodin lidské práce je potřeba v jednotlivých fázích na výrobu jednoho kusu.

Produkt	1	2	3	4
Kč za 1 kus	100	150	220	170
Max. kusů za týden	50	60	85	70
Hodin ve fázi A	1	2	2	5
Hodin ve fázi B	1	4	2	2
Hodin ve fázi C	1	6	3	1

V dalším týdnu bude možno využít až 160 hodin lidské práce ve fázi A, 200 hodin ve fázi B a 80 hodin ve fázi C. Navíc lze přeplánovat až 20% času pracovníků z fáze B do fáze A a až 30% času pracovníků z fáze C do fáze A.

Interní směrnice také vyžadují, aby poměr (počet vyrobených kusů produktu 1) / (počet vyrobených kusů produktu 4) byl mezi 0.9 a 1.15.

Formulujte problém maximalizace zisku firmy v dalším týdnu jako lineární program (náklady na výrobu už jsou započteny do zisku). Proměnné nemusíte mít celočíselné.

Jak se změní LP, pokud bychom za minimum z počtu vyrobených kusů jednotlivých produktů dostali speciální dotaci 50 Kč za kus (tj. pokud by se vyrobilo min. 20 kusů od každého produktu, dostali bychom 1000 Kč)?