12. CVIČENÍ Z OPTIMALIZACE

Primárně-duální algoritmy

D: Mějme optimalizační problém a označme OPT hodnotu účelové funkce pro optimální řešení. Řekneme, že algoritmus A je *k-aproximační* pro daný problém, pokud A vrací přípustné řešení a hodnota účelové funkce tohoto řešení je $A \leq k \cdot OPT$ (pokud minimalizujeme, pro maximalizaci chceme $A \geq OPT/k$).

Pozorování: Pro každé řešení minimalizačního ILP a jeho LP relaxace platí, že $OPT_{LP} \leq OPT_{ILP}$ (resp. $OPT_{LP} \geq OPT_{ILP}$ pro maximalizaci).

D: Pro graf $G = (V, E)$ se dvěma význačnými vrcholy s, t míníme *s, t-řezem* jakoukoli podmnožinu $S \subseteq V, s \in S, t \notin S$.

Pár příkladů z písemky:

Příklad první Zformulujte celočíselný lineární program pro NP-úplný problém MaxCut. Máme zadaný graf s kladně ohodnocenými hranami a chceme najít rozdělení vrcholů do dvou skupin takové, že celková váha hran vedoucích mezi skupinami je co největší. Jinými slovy hledáme největší hranový řez v grafu.

Příklad druhý Máme mnohostěn v $\mathbb{R}^4$ určený jako konvexní obal této množiny vrcholů:

$$(-3, 0, 0, 0) \tag{1}$$
$$(-1, 0, 0, 2) \tag{2}$$
$$(0, 2, 0, 0) \tag{3}$$
$$(1, 4, 1, 0) \tag{4}$$
$$(3, 0, 0, 0) \tag{5}$$

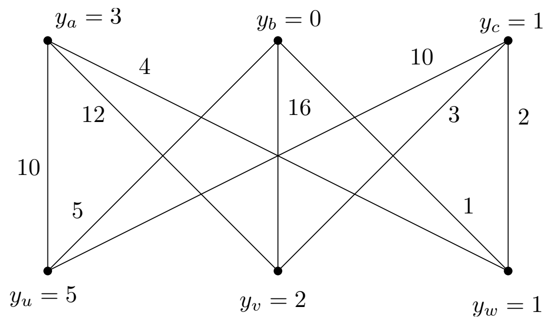
Pro čtveřici vrcholů (1),(2),(3),(4) spočítejte rovnicový popis $\{x \in \mathbb{R}^4 | c^T x = b\}$ nadroviny, na které všechny 4 body leží. Rozhodněte také, je-li tato nadrovina sečná, tečná nebo mimoběžná vůči zadanému mnohostěnu.

Příklad třetí Pro problém vrcholové 3-obarvitelnosti grafu vymyslete nejdříve vhodný celočíselný lineární program. Tento program pouze otestuje, zda-li je zadaný graf 3-obarvitelný.

Pak tento program zrelaxujte a zdualizujte.

Příklad čtvrtý Na začátku cvičení jste viděli 2-aproximační algoritmus pro Vážené vrcholové pokrytí, ve kterém se vygenerovala dvojice přípustných řešení (x, y). Tato dvojice přípustných řešení většinou nebude optimální, protože to je jen 2-aproximace. Zdůvodněte, které podmínky věty o komplementaritě budou porušeny.

Příklad pátý   Na obrázku je bipartitní graf, který má u hran napsané ceny a u vrcholů řešení duálního programu k perfektnímu párování minimální ceny. Dokažte, že toto řešení je optimální.



Dále se zkuste zamyslet, jaké různé možnosti máte pro dokázání, že dané řešení je optimální.

Příklad šestý   Mějme LP pro hledání nejkratší cesty z bodu s do bodu t v grafu ohodnoceném nezápornými délkami cest jako $\{0,1\}$-celočíselný program. LP obsahuje podmínku pro každý s,t-řez v grafu. Mějme také duál.

Primár:

$$\min \sum_{i=1}^{m} c_e x_e$$
$$\forall S \ s,t\text{-řez}: \sum_{e \in \delta(S)} x_e \geq 1$$
$$\forall e \in E: x_e \in \{0,1\}$$

Duál:

$$\max \sum_{S} y_S$$
$$\forall e \in E: \sum_{S \ s,t\text{-řez}: e \in \delta(S)} y_S \leq c_e$$
$$\forall S \ s,t\text{-řez}: y_S \geq 0$$

($\delta(S)$ jsou hrany vedoucí z S do doplňku.)
Nyní uvažte následující algoritmus:

1. $\vec{y} \leftarrow 0$, kde y je vektor duálních proměnných.
2. $F \leftarrow \emptyset$ – nepřípustné řešení primálu.
3. Dokud neexistuje s,t-cesta v $G[F]$:
4. Uvažme (jedinou) souvislou komponentu C v grafu $G[F]$ obsahující s.
5. Zvyšujte hodnotu y_C, dokud nějaká podmínka (odpovídající e) nebude těsná.
6. Přidejte e do F.
7. Pro každé $e \in F$:
8. Pokud $G[F \setminus \{e\}]$ obsahuje s,t-cestu, tak odeber e z F.
9. Vrať F jako nejkratší s,t-cestu

Dokažte, že tento algoritmus najde nejkratší cestu.

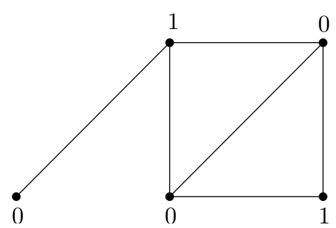
Domácí úkoly

Deadline na odevzdání: 20. června.

Desátý domácí úkol **[2 body]**

Na obrázku je zadán graf a u jeho vrcholů je přípustné řešení relaxovaného lineárního programu pro maximální nezávislou množinu:

$$\max \sum_{v \in V} x_v$$
$$\forall e \in E: x_u + x_v \leq 1$$
$$\forall v \in V: x_u \geq 0$$



S užitím komplementarity ověřte, jedná-li se o optimální řešení.