8. CVIČENÍ Z OPTIMALIZACE

Dualita

D: Mějme lineární program s n proměnnými a m podmínkami:

$$\max c^T x,\ \ Ax \leq b,\ \ x \geq 0$$

Pak jeho *duálem* nazveme následující lineární program s m proměnnými a n podmínkami:

$$\min b^T y,\ \ A^T y \geq c,\ \ y \geq 0$$

T(Slabá věta o dualitě**):** Mějme maximalizační lineární program $\max c^T x$ a duální minimalizační program $\min b^T y$. Pak pro libovolné řešení x a libovolné řešení duálu y platí, že $c^T x \leq b^T y$.

Jinými slovy, hodnota duálního řešení je horní odhad na hodnotu libovolného primárního řešení.

Původní program:	*V duálu bude:*
maximum	minimum
$\max c^T x$	$\min b^T y$
m podmínek n proměnných	m proměnných n podmínek
i-tá podmínka má $\leq$ i-tá podmínka má $\geq$ i-tá podmínka má $=$	$y_i \geq 0$ $y_i \leq 0$ $y_i \in \mathbb{R}$
$x_j \geq 0$ $x_j \leq 0$ $x_j \in \mathbb{R}$	j-tá podmínka má $\geq$ j-tá podmínka má $\leq$ j-tá podmínka má $=$

---

z minula:

Příklad první Aplikujte simplexovou metodu. V nějaké chvíli by již nemělo být možné pokračovat. Závisí tento problém na účelové funkci, nebo jen na mnohostěnu?

- Optimalizujte funkci $\max 3x_1 + x_2$ na mnohostěnu P:

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & - & x_2 & \leq & -1 \\ -x_1 & - & x_2 & \leq & -3 \\ 2x_1 & - & x_2 & \leq & 2 \\ \multicolumn{5}{l}{x_1, x_2 \geq 0.} \end{array}$$

- Optimalizujte funkci $\max 4x_1 + 5x_2 + 3x_3$ na mnohostěnu P:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &\geq 20 \\ x_1 + x_2 + x_3 &\leq 10 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 &\leq 30 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Příklad druhý Sestrojte duální úlohu k následující úloze:

$$\begin{aligned} \max x_1 - 2x_2 + 3x_4 & \\ x_2 - 6x_3 + x_4 &\leq 4 \\ -x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= 0 \\ 6x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 &\geq 5 \\ x_2 &\leq 0 \\ x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Příklad třetí Sestrojte duální úlohu k lineární relaxaci úlohy Minimální vrcholové pokrytí pro vážený graf $G = (V, E, w)$. Pro připomenutí, úloha vypadá takto:

$$\begin{aligned} \min \sum_{v \in V} w(v) x_v & \\ \forall e = (uv) \in E : x_u + x_v &\geq 1 \\ \forall v \in V : x_v &\geq 0 \end{aligned}$$

Příklad čtvrtý Nalezněte program, který je nepřípustný a jeho duál je také nepřípustný.

Příklad pátý Dokažte nebo vyvraťte tvrzení:

- pro každý lineární program L platí, že duál duálu L je původní program L.
- Pokud má lineární program optimum s celočíselnými proměnnými, tak má celočíselné optimální řešení i duál.