

### 3. CVIČENÍ Z OPTIMALIZACE

LPčka ve 2D a formulace celočíselných LPček

PŘÍKLAD PRVNÍ

Vyřešte grafickou metodou následující systém nerovnic (čili LP):

$$\begin{aligned} -2x + 3y &\leq 3 \\ x + y &\leq 6 \\ -x + y &\geq -4 \\ x + 3y &\leq 12 \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

Pro účelové funkce:

- a)  $\max x + y$
- b)  $\max -3x + y$

Co se stane, když odebereme poslední dvě podmínky, tj.  $x \geq 0, y \geq 0$ ?

PŘÍKLAD DRUHÝ

*Rozcvička s batohem!*

Zformulujte problém batohu pomocí celočíselného lineárního programování. Tedy pro předměty, kde každý má nějakou hmotnost  $h_i$  a cenu  $c_i$ , máme batoh s danou nosností  $H$  a snažíme se do něj naskládat předměty tak, abychom maximalizovali jejich cenu.

PŘÍKLAD TŘETÍ

Minimální vážené párování v bipartitním grafu:

Pro vážený bipartitní graf  $G = (U, V, E, w)$  s partitami  $U$  a  $V$ , kde  $w(e) \in \mathfrak{R}$  je váha hrany  $e$ , nalezněte perfektní párování minimální váhy. Perfektní párování je množina hran taková, že každý vrchol je incidentní s právě jednou hranou, a váha párování je součet vah všech hran v párování.

PŘÍKLAD ČTVRTÝ

Celočíselné optimum  $\leq$  neceločíselné optimum (při maximalizaci):

Mějme zadanou matici  $A$  a vektory  $b$  a  $c$ . Z nich můžeme postavit třeba tento celočíselný program  $C$ :  $\max c^T x$  za podmínek  $Ax \leq b$  pro  $x \in \{0, 1\}^n$ .

Můžeme z nich ale postavit také následující lineární program  $L$ :  $\max c^T x$  za podmínek  $Ax \leq b$  pro  $x \in [0, 1]^n$ .

Předpokládejme, že oba programy jsou řešitelné a mají optimální řešení. Pojmenujme jedno optimální řešení celočíselného programu  $x_C^*$  a jedno optimální řešení lineárního programu  $x_L^*$ . Zdůvodněte, že platí následující nerovnost:

$$c^T x_C^* \leq c^T x_L^*.$$

PŘÍKLAD PÁTÝ

Student Tomáš Pilný dostal na cvičení z Optimalizace zadaný úkol:

*Navrhněte celočíselný program pro problém obchodního cestujícího, čili pro daný ohodnocený graf  $G = (V, E, w)$ , kde  $w(e) \geq 0$  je délka hrany  $e$ , chceme najít Hamiltonovskou kružnici s nejkratší délkou. Hamiltonovská kružnice navštíví každý vrchol právě jednou.*

Tomáš navrhuje následující řešení:

„Pro každou hranu  $uv$  máme proměnnou  $x_{uv} \in \{0, 1\}$ , cílová funkce je  $\min \sum_{uv \in E} w(uv)x_{uv}$  a pro každý vrchol  $u$  máme podmínku  $\sum_{v|uv \in E} x_{uv} = 2$ .“

Funguje toto řešení? Pokud ano, zdůvodněte, pokud ne, zdůvodněte a ještě vymyslete lepší.

# Domácí úkoly

Deadline na odevzdání je začátek cvičení za 14 dní od zadání.

**TŘETÍ DOMÁCÍ ÚKOL** **Dopravní problém.** **[2 body]**

V Kocourkově je  $n$  pekáren a  $m$  obchodů. Každý den  $i$ -tá pekárna upeče  $p_i$  rohlíků a  $j$ -tý obchod prodá  $o_j$  rohlíků. Převoz jednoho rohlíku z  $i$ -té pekárny do  $j$ -tého obchodu stojí  $c_{ij}$  korun.

*Jenže!* Praxe v Kocourkově ukázala, že když  $i$ -tá pekárna zásobuje  $j$ -tý obchod, tak musí pro tuto trasu zajistit logistiku, která je stojí  $l_{ij}$ . Logistiku  $l_{ij}$  je nutné platit pouze tehdy, když  $i$ -tá pekárna zásobuje  $j$ -tý obchod nenulovým počtem rohlíků, a její cena nezávisí na počtu převážených rohlíků. I nadále je nutné platit přepravné  $c_{ij}$ .

Nalezněte takovou distribuci rohlíků, aby se každá pekárna zbavila všech rohlíků, každý obchod získal (právě) potřebný počet rohlíků a celkové náklady na převoz byly minimální.

**ČTVRTÝ DOMÁCÍ ÚKOL** **[1 bod]**

Mějme zadanou matici  $A$  a lineární program  $Ax \leq 0, x \geq 0$ . Vymyslete lineární program, pomocí kterého jde rozhodnout, jestli mnohostěn přípustných řešeních LP obsahuje pouze bod 0 nebo ne.

*Tip:* Budou se asi opět hodit triky s epsilony.