1. CVIČENÍ Z OPTIMALIZACE

Opakování lingebry – matka moudrosti a optimalizačních metod

Web cvičení: `http://iuuk.mff.cuni.cz/~vesely/vyuka/1516/opt.html`

Email: `vesely@iuuk.mff.cuni.cz`

Příklady naleznete na zadní straně.

D: Množina $A \subseteq \mathbb{R}^d$ je *afinní prostor*, pokud A je tvaru $L + v$ pro nějaký lineární prostor L a posuvný vektor $v \in \mathbb{R}^d$. Tvrzením „A je tvaru $L + v$“ se myslí bijekce mezi vektory z L a vektory A zadaná jako $b(u) = u + v$. *Dimenze* afinního prostoru A je rovna dimenzi jeho přidruženého lineárního prostoru L.

D: Vektor x je *afinní kombinací* konečné množiny vektorů $a_1, a_2, \dots a_n$ pokud $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i$, kde α_i jsou reálná čísla splňující $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$.

Množina bodů/vektorů $V \subseteq \mathbb{R}^d$ je *afinně nezávislá*, pokud platí, že žádný vektor $v \in V$ není afinní kombinací ostatních.

D: Pokud máme množinu vektorů $V \subseteq \mathbb{R}^d$, můžeme uvažovat její *afinní obal*, což je množina všech vektorů A, které jsou afinní kombinací jakékoli konečné podmnožiny vektorů z V.

Podobně jako lineární prostory, i konečné afinní prostory mají konečnou bázi, takže nemusíme uvažovat všechny konečné podmnožiny pro generovaní afinního obalu – stačí generovat afinní kombinace báze.

D: *Nadrovina* je libovolný afinní prostor v $\mathbb{R}^d$ dimenze $d - 1$. V rovině tedy je každá přímka nadrovinou, v 3D prostoru je nadrovinou libovolná rovina, atd.

Nadrovina rozděluje prostor $\mathbb{R}^d$ na dva *poloprostory*. Nadrovinu samotnou počítáme jako součást obou poloprostorů.

T: Každý lineární prostor dimenze k obsahuje k-vektorovou bázi. Takovou bázi dokonce můžeme najít *ortogonální* (nebo dokonce *ortonormální*) a stejně tak můžeme najít *ortogonální doplněk* této báze.

Příklad první Vyřešte Gauss-Jordanovou eliminací následující systém rovnic:

$$\begin{aligned} 3x + 2y + 4z + w &= 0 \\ 2x + 4y + 2z + 2w &= 5 \\ -x + 2y + 2z + w &= 7 \\ 4z &= 2 \end{aligned}$$

Jak vypadá afinní podprostor řešení?

Příklad druhý Dokažte následující ekvivalenci:

Množina $n+1$ vektorů $v_0, v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ v $\mathbb{R}^d$ je afinně nezávislá právě tehdy, když množina n vektorů $v_1 - v_0, v_2 - v_0, v_3 - v_0, \ldots, v_n - v_0$ je lineárně nezávislá.

Příklad třetí

1. Dokažte, že každý afinní prostor lze vyjádřit jako průnik konečně mnoha (afinních) nadrovin.
2. Dokažte, že každou afinní nadrovinu lze vyjádřit jako množina řešení soustavy $\{x | c^T x = b\}$.

Příklad čtvrtý *(Hlavní chod cvičení!)* Dokažte následující ekvivalenci, která dává snadný algebraický popis afinních prostorů:

Množina $F \subseteq \mathbb{R}^d$ je afinní podprostor, právě když $F = \{x \in \mathbb{R}^d | Ax = b\} \neq \emptyset$ pro nějakou matici $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ a nějaký vektor $b \in \mathbb{R}^d$.

Příklad pátý Vyřešte grafickou metodou následující systém nerovnic:

$$\begin{aligned} x + y + z &\geq 2 \\ x + y + z &\leq 2 \\ x + 2y - z &\leq 10 \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \\ z &\geq 0 \end{aligned}$$

Nalezněte speciálně ta řešení, která maximalizují proměnnou x, resp. y, resp. z.

Nápověda: Řešením grafickou metodou prostě myslíme „nakreslete množinu řešení určenou polorovinami na papír a rozhodněte, jestli je prázdná (systém nemá řešení), jednobodová, omezená nebo neomezená.“

Příklad šestý K zamyšlení na konec cvičení nebo do tramvaje:

1. Mohou se dvě dvoudimenzionální roviny (prostě klasické roviny) protínat v jednom bodě, pokud jsme v prostoru $\mathbb{R}^4$?
2. Mohou se dva prostory dimenze 3 protínat v $\mathbb{R}^5$ v jednom bodě?