

1.

• X : kolik dostaneme bodu?

• X_i : kolik dostaneme bodu z i -tí otázek?

$\rightarrow X = \sum X_i \Rightarrow E[X] = \sum E[X_i]$... zaměřme se na

a)

• U_i : učit jsem se na i -tou otázku?

• $E[X_i | U_i = 1]$?

$= \sum_x x \cdot Pr[X_i = x | U_i = 1] = 1$ ze zadání

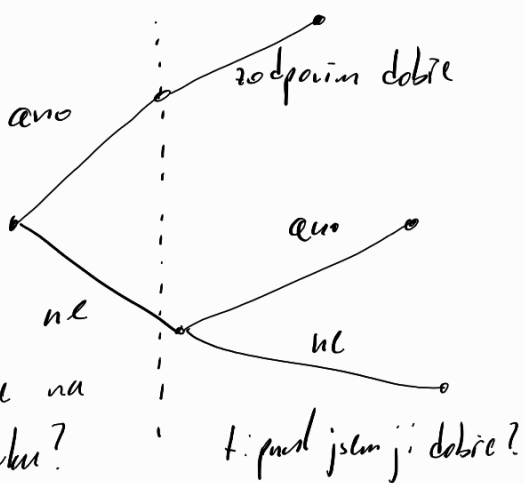
• $Pr[U_i = 1]$? = p ze zadání

• $Pr[X_i \cap U_i = 1] = Pr[X_i | U_i = 1] Pr[U_i] = p$

• $E[X | U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_{20}] = 20p$ (U_i je nezávislé na X_j pro $i \neq j$)

b)

$T_i = \begin{cases} 1 & \text{hodný zisk, pokud jsem i-tou otázku správně} \\ -\frac{1}{4} & \text{špatně} \end{cases}$



$\rightarrow E[X_i] = E[X_i \cap U_i = 1] + E[X_i \cap U_i = 0 \cap T_i = 1] + E[X_i \cap U_i = 0 \cap T_i = 0] =$

$$= p + (1-p) \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 + (1-p) \cdot \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) =$$

$\Pr[U_i=0] \Pr[T_i=1|U_i=0]$ $\Pr[U_i=0] \Pr[T_i=0|U_i=0]$

hodový zisk
při správné odpovědi

$$= p + \frac{1-p}{4} - \frac{3(1-p)}{16} = \frac{16p + 4 - 4p - 3 + 3p}{16} = \frac{15p + 1}{16} = p + \frac{1-p}{16}$$

X_i je jednoznačně určeno podle T_i , to nevadí

$$E[X] = 20p + \frac{5}{4}(1-p)$$

c) řešíme rovnici pro x

$$\frac{1}{4}(1-p) = \frac{3}{4}(1-p)x$$

$$x = -\frac{1}{3}$$

6.

$X+Y$ měří, jak dlouho trvalo, než popoví padly dvě panny

$\rightarrow \Pr[X=i | X+Y=n] = \frac{1}{n-1} \Rightarrow$ pokud druhá panna padne na n -tý

hod, pak první byla uniformně první až $(n-1)$. hod

ovčrne výpočten

$$P_r[X=k] = (1-p)^k p$$

$$P_r[X=i \mid X+Y=n] = \frac{P_r[X=i \cap X+Y=n]}{P_r[X+Y=n]} = \frac{P_r[X=i] P_r[Y=n-i]}{P_r[X+Y=n]}$$

$\xrightarrow{Y=n-i}$ \swarrow nezávislost X a Y

$$= \frac{(1-p)^{i-1} p (1-p)^{n-i-1} p}{\sum_{k=1}^{n-1} P_r[X=k] P_r[Y=n-k]} = \frac{(1-p)^{n-2} p^2}{\sum_{k=1}^{n-1} (1-p)^{k-1} p (1-p)^{n-k-1} p} = \frac{(1-p)^{n-2}}{(n-1)(1-p)^{n-2}}$$

$$= \frac{1}{n-1} \quad \checkmark$$