Nechť $X \sim \mathrm{Binom}(n,p)$, $Y \sim \mathrm{Binom}(m,p)$. Co je $Z = X+Y$?

- $Pr[Z=k] = \left(\sum_{j=0}^{k} Pr[X=j] \cdot Pr[Y=k-j] \right)$

- to se dopočítá na $\binom{n+m}{k} p^k (1-p)^{n+m-k}$:)

$X = X_1 + \dots + X_n$ a X_i jsou $\mathrm{Bern}(p)$. Pokud jsou X_i nezávislé, pak $X \sim \mathrm{Binom}(n,p)$. Ukažte, že nezávislost je nutná, tj. pokud nejsou nezávislé, pak nemusí být pravda.

- první část jasná
- v druhé části si představme $X_1 = X_2 = \dots = X_n$
- pak třeba $Pr[X \geq 2] = 0$ ... to nevypadá moc binomiálně.

Alice má školu 2 km od domu. Pokud prší, Alice jde do školy pěšky prům. rychlostí 5 km/h, jinak jede na kole prům. rychlostí 10 km/h. Určete střední hodnotu prům. rychlosti, kterou Alice jede, pokud pst deště je 60 %. Také určete střední hodnotu času, kterou stráví na cestě.

• V : n.v. pro rychlost, kterou Alice cestuje

• $V = \begin{cases} 10 \ (\text{km/h}) & \text{s pstí } 0{,}4 \\ 5 & \text{—"—} \ 0{,}6 \end{cases}$

• $\mathbb{E}[V] = 0{,}4 \cdot 10 + 0{,}6 \cdot 5 = 7$

• T : čas, který Alice stráví na cestě

• $T = 2 \cdot V^{-1}$ (středoškolská fyzika :))

→ $\mathbb{E}[T] = 2 \cdot \mathbb{E}[V]^{-1}$? uvidíme, že ne

• $T = \begin{cases} 0{,}2 \ (\text{hodin}) & \text{s pstí } 0{,}6 \\ 0{,}4 & \text{—"—} \ 0{,}4 \end{cases}$

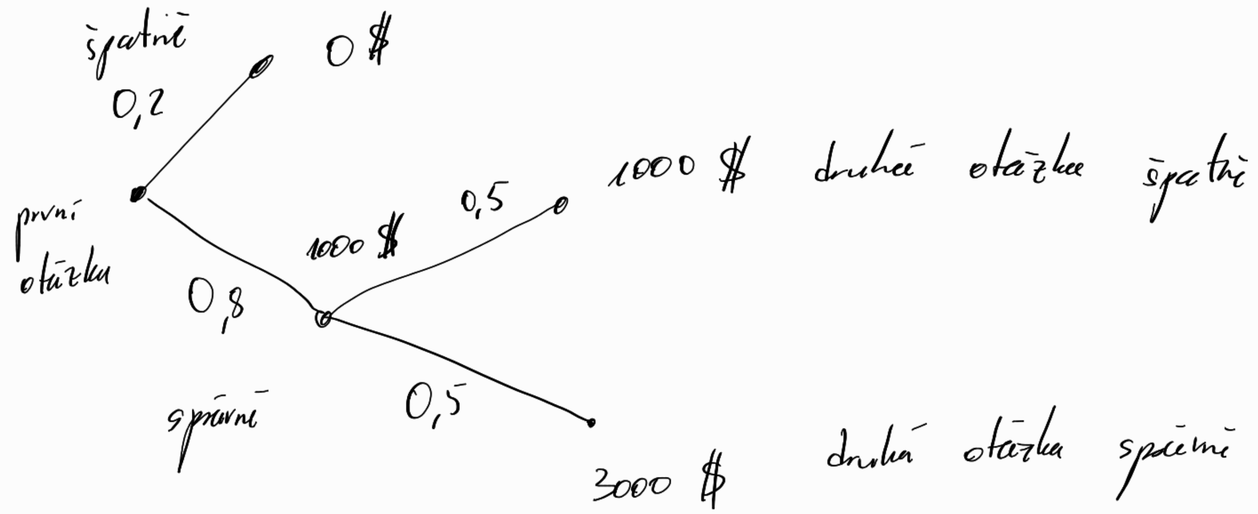
• $\mathbb{E}[T] = 0{,}2 \cdot 0{,}6 + 0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}28 \text{ h} \neq \frac{2}{\mathbb{E}[V]} \left(= \frac{2}{7}\right)$

→ obecně neplatí $\mathbb{E}[g(X)] = g(\mathbb{E}[X])$!

Soutěžíme ve kvízu se dvěma otázkami. Pst, že správně odpovíme na první otázku je 0,8 a na druhou je 0,5. Za správnou odpověď v první otázce je odměna 1000 \$, ve druhé 2000 \$. Po špatné odpovědi je konec hry a vyhráváme peníze za každou dosud správně zodpovězenou otázku. Po správné odpovědi lze odpovídat na nezodpovězené otázky. Je lepší začít první či druhou otázkou?

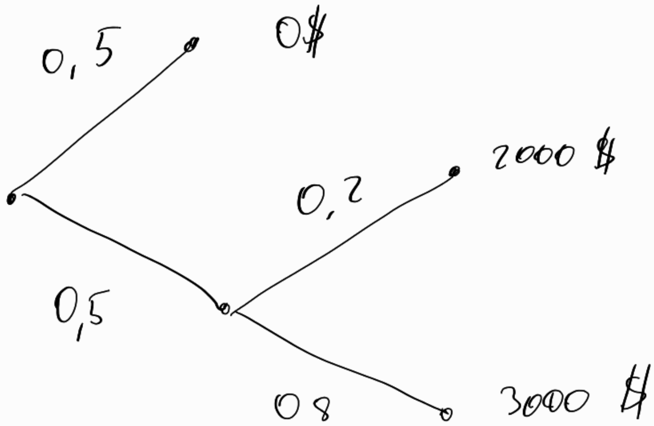
• X : kolik vyhrajeme

• Pokud začneme první otázkou



$\rightarrow \mathbb{E}[X] = 0 \cdot 0{,}2 + 1000 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}5 + 3000 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}5 = 1600$

• pokud začneme druhou otázkou



$\rightarrow \mathbb{E}[X] = 0 \cdot 0{,}5 + 2000 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}2 + 3000 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}8 = 1400$

- co kdybychom měli obecná čísla p_1, p_2 za psti a výherní částky c_1, c_2 ?

- X_1 : odměna když začneme první otázkou

  X_2 : ———— " —— druhou ————

- $\mathbb{E}[X_1] = p_1(1-p_2)c_1 + p_1 p_2 (c_1 + c_2)$

  $\mathbb{E}[X_2] = p_2(1-p_1)c_2 + p_2 p_1 (c_1 + c_2)$

- kdy je $\mathbb{E}[X_1] > \mathbb{E}[X_2]$? pokud

$$p_1 c_1 - p_1 p_2 c_1 > p_2 c_2 - p_2 c_2 p_1 \quad \Big/ \frac{1}{(1-p_1)(1-p_2)}$$

$$\frac{p_1 c_1}{1-p_1} > \frac{p_2 c_2}{1-p_2}$$

- vnímáme-li $\frac{pc}{1-p}$ jako nějaký „index efektivity", tak chceme odpovídat na otázky v pořadí nerostoucí efektivity