Hrajeme v StarCraft turnaji. Naše šance výhry proti Terranům je 55 %, Zergům je 51 % a 39 % proti Protossům (Protoss OP). Terranů je 28 %, Zergů 29 % a Protossů je zbytek. Jaká je šance, že jsme vyhráli první hru?

- S_i ... Soupeř hraje za rasu i
- zadání říká

$$Pr[S_T] = \frac{7}{25}, \quad Pr[S_Z] = \frac{29}{100}, \quad Pr[S_P] = \frac{43}{100}$$

$$Pr[V \mid S_T] = \frac{13}{25}, \quad Pr[V \mid S_Z] = \frac{51}{100}, \quad Pr[V \mid S_P] = \frac{39}{100}.$$

- víme o úplné psti

$$Pr[V] = Pr[V \cap S_T] + Pr[V \cap S_P] + Pr[V \cap S_Z]$$

- a z minula víme $Pr[A \cap B] = Pr[A \mid B]\, Pr[B]$

- $$Pr[V] = \frac{7}{25} \cdot \frac{13}{25} + \frac{29 \cdot 51}{100 \cdot 100} + \frac{39 \cdot 43}{100 \cdot 100} =$$

$$= 46.12\,\% \quad (:()$$

Naštěstí jsme vyhráli. Jaká je šance, že jsme hráli proti Protossovi?

- Bayesovo pravidlo.

$$\Pr[S_p \mid V] = \frac{\Pr[V \cap S_p]}{\Pr[V]} = \frac{\Pr[V \mid S_p]\Pr[S_p]}{\Pr[V]} =$$

$$= \frac{0.39 \cdot 0.43}{0.4612} = 0.3636\ldots \quad (\frown)$$

Test na covid je správný v 95% případů: u pozitivního člověka ukáže pozitivní výsledek s pstí 95% a u negativního člověka ukáže s 95% šancí negativní výsledek. Náhodný člověk má šanci 0.1%, že má covid.

Test o někom ukázal, že je pozitivní. Jaká je pst, že je pozitivní?

- C: má covid

  T: pozitivní test

- $\Pr[C \mid T]$?

- Bayesovou větou

$$\Pr[C \mid T] = \frac{\Pr[T \mid C]\Pr[C]}{\Pr[T \mid C]\Pr[C] + \Pr[T \mid \bar{C}]\Pr[\bar{C}]}$$

$$= \frac{0.95 \cdot 0.001}{0.95 \cdot 0.001 + 0.05 \cdot 0.999} \doteq 0.02$$

Vězňovo dilemma: Máme dva spoluvězně. Bachař oznámil, že z nás tří náhodně vybere dva a pustí je. Zeptáme se strážce, kterého ze spoluvězňů (tj. ne nás) propustí, ale ne poslední chvíli si to rozmyslíme. Uvažujeme takto: „Máme šanci $\frac{2}{3}$, že budeme propuštěni. Pokud ale víme o jednom ze spoluvězňů, že bude propuštěn, pak je šance $\frac{1}{2}$, že budeme propuštěni, neboť pak jsou jen dva vězni, jejichž osud je neznámý."

V čem je chyba?

- špatně uvažujeme případ, kdy nejsme puštěni
- počítejme správně :-)
- A, B, C ... jevy, že pustí vězně A, B nebo C a my jsme A
- dále uvažme, že pokud je puštěn B nebo C, pak si strážce uniformně náhodně vybere B nebo C
- 4 možné případy

koho pustí	koho řekne strážce	pst případu
A, B	B	1/3
A, C	C	1/3
B, C	B	1/6
B, C	C	1/6

• $\Pr[A \mid \text{strážce řekne } B] = \dfrac{\Pr[A \cap \text{strážce řekne } B]}{\Pr[\text{strážce řekne } B]} = \dfrac{1/3}{1/3 + 1/6}$

$= \dfrac{2}{3}$

• podobně pokud strážce řekne C

Nezávislost

Odstrašující příklad

• mějme dva jevy A, B t.ž. $A \cap B = \emptyset$
• jsou jevy A a B nezávislé?
• když víme, že nastalo A tak rozhodně nenastalo B

Házíme dvěma čtyřstěnnými kostkami. A_i … na první kostce padlo i,

B_j … na druhé kostce padlo j?

Jsou jevy A_i a B_j nezávislé?

• $\Pr[A_i] = \frac{1}{4}$

• $\Pr[B_j] = \frac{1}{4}$

• $\Pr[A_i \cap B_j] = \frac{1}{16}$

→ ano

Jsou jevy $A = \{$ na první kostce je $1\}$ a

$B = \{$ součet kostek je $5\}$ nezávislé?

- $Pr[A \cap B]$ => druhá kostka musí být 4

=> $= \frac{1}{16}$

- $Pr[A] = \frac{1}{4}$
- $Pr[B] = ?$ ať padne cokoliv, co je na první kostce je

určeno jednoznačně, aby součet byl 5

$\rightarrow Pr[B] = \frac{1}{4}$

$\rightarrow$ nezávislé $\ddot{\circ}$

Jsou jevy $A = \{$ max je $2\}$ a

$B = \{$ min je $2\}$ nezávislé?

- $Pr[A \cap B] = Pr[(2,2)] = \frac{1}{16}$
- $Pr[A] = Pr[\{(1,2), (2,1), (2,2)\}] = \frac{3}{16}$
- $Pr[B] = \frac{5}{16}$
- $Pr[A \cap B] = Pr[A] Pr[B]$? ne

$\rightarrow$ závislé

Nezávislost pro více jevů

Házíme dvěma mincemi. Ozn. jevy

P_1: na první minci je panna

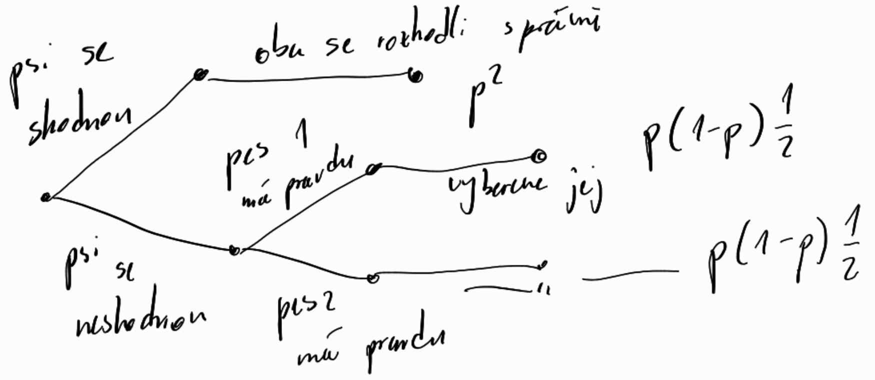
P_2: na druhé minci je panna

R: výsledky mincí jsou různé

- $Pr[R \mid P_1] = \dfrac{Pr[R \cap P_1]}{Pr[P_1]} = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2} = Pr[R]$
- podobně $Pr[R \mid P_2] = \dfrac{1}{2}$
- ale $P_1 \cap P_2 \cap R$ nenastane nikdy

→ po dvou jsou nezávislé, ale zároveň už ne :)

Lovec má dva lovecké psy. Jednoho dne přijde k „rozbočce". Každý ze psů se rozhodne pro správnou cestu nezávisle na druhém s pstí p. Lovec nechá každého psa rozhodnout a pokud se shodnou, tak jdeme podle nich. Pokud se neshodnou, vybereme si náhodně s šancí $\frac{1}{2}$. Je tato strategie lepší, než nechat jednoho ze psů rozhodnout?



- celkem $p^2 + p(1-p)\frac{1}{2} + p(1-p)\frac{1}{2} = p$

- strategie jsou stejně efektivní :(