Taháme karty z balíčku, který jsme dokonale zamíchali. Tj. každá permutace karet se vyskytuje s toutéž pst. Vytáhneme 3 karty, jaká je pst, že všechny jsou srdcové?

Brute force postup:

- kolik je srdcových uspořádaných trojic?
- (A, 2, 3), (A, 2, 4), ..., (J, Q, K)
- kolik je všech trojic?

...

- teď tato dvě čísla vydělíme a je to
- akorát se mi nechtějí určovat

Sofistikovaný postup

- nejprve vytáhnu jednu kartu a pokud je srdcová, tak táhnu druhou a pokud je srdcová, táhnu třetí

V řeči (podm.) psti

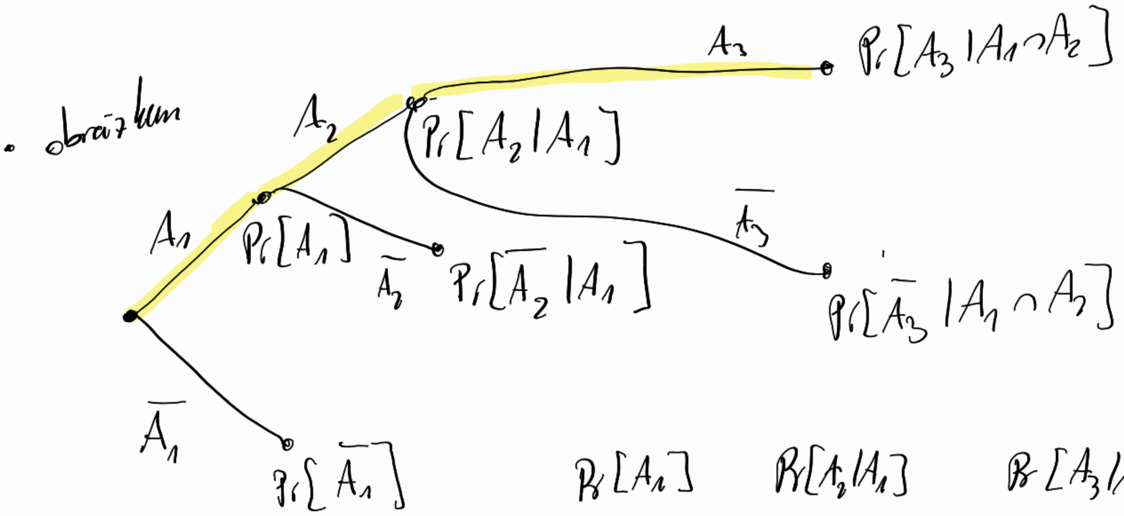
- A_i ... i-tá karta je ♡
- chceme $Pr[A_1 \cap A_2 \cap A_3]$?
- řetízkové pravidlo $Pr[\bigcap_{i=1}^{n} A_i] > 0 \Rightarrow$ (další strana)

$$Pr\left[\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right] = Pr[A_1]\cdot Pr[A_2|A_1]\cdot Pr[A_3|A_1\cap A_2]\cdot \dots \cdot Pr\left[A_n \,\Big|\, \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right] \quad (*)$$

• důkaz za použití $Pr[A|B] = \dfrac{Pr[A\cap B]}{Pr[B]}$

$$(*) = \cancel{Pr[A_1]}\cdot \frac{\cancel{Pr[A_2\cap A_1]}}{\cancel{Pr[A_1]}}\cdot \frac{Pr[A_3\cap A_2\cap A_1]}{\cancel{Pr[A_2\cap A_1]}}\cdot \dots \cdot \frac{Pr\left[\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right]}{\cancel{Pr\left[\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right]}}$$

• obrázkem



$Pr[A_1]$ $\quad Pr[A_2|A_1]$ $\quad Pr[A_3|A_1\cap A_2]$

• tudíž $Pr[A_1\cap A_2\cap A_3] = \dfrac{13}{52}\cdot\dfrac{12}{51}\cdot\dfrac{11}{50}$

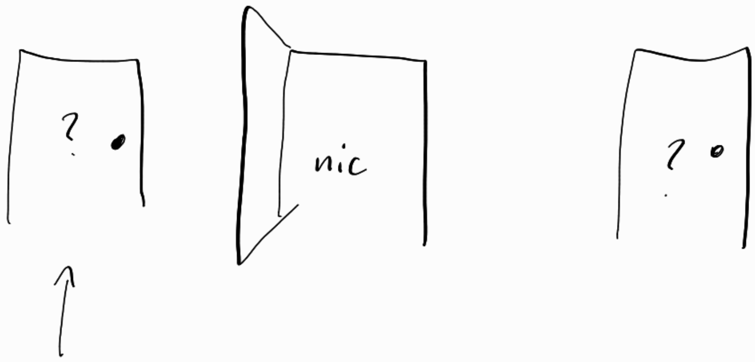
chybí 1 srdce neboť nastalo A_1

chybí 2 srdce

Monty Hall paradox

V soutěži jsou troje dveře. Za jedněmi je milion dolarů a za zbytkem není nic. Máme si jedny dveře vybrat. Než vybrané dveře otevřeme, Moderátor otevře TY NEVYBRANÉ DVEŘE, ZA NIMIŽ (jedny) NEJSOU PENÍZE. Pokud změníme odpověď na ty dveře, které moderátor nechal zavřené, jaká je pst výhry peněz?

- BÚNO ukázali jsme na první dveře a nyní víme, že za druhými dveřmi peníze nejsou



- jaká je pst, že peníze jsou v tuto chvíli za prvními dveřmi?

→ $\frac{1}{3}$, nic se nezměnilo

- takže pst výhry, pokud nezměníme náš výběr, je $\frac{1}{3}$
- člověk by si řekl, že pst výhry při změně odpovědi na 3. dveře je stále $\frac{1}{3}$
- ale v tuto chvíli je pst výhry to, že peníze NEJSOU za prvními dveřmi
- a tohle jsou $\frac{2}{3}$

Alice má $n+1$ mincí a Bob n mincí. Mince jsou férové.

Kdo hodí více orlů vyhrává. V případě remízi hrajeme znovu.

Ukažte, že pst výhry Alice je $> \frac{1}{2}$.

- vybavení znalostmi o podm. pst. a za použití Věty o úplné pst, tj.

Mějme disj. jevy $B_1, \dots, B_n$ t.ž. $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$. Pak pro libovolný jev A platí

$$Pr[A] = \sum_{i=1}^{n} Pr[A \cap B_i] = \sum_{i=1}^{n} Pr[A | B_i] Pr[B_i].$$

spočítáme

B_i : Bob hodí i orlů

A : Alice vyhraje

$$Pr[A] = \sum_{i=1}^{n} Pr[A | B_i] \; Pr[B_i]$$

- $Pr[B_i]$? (Spoiler na binomiální rozdělení)

$$Pr[B_i] = \binom{n}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^i \left(\frac{1}{2}\right)^{n-i}$$

na zbytku padne panna

orlové skutečně padnou

i-tice, na které padnou orlové

- $Pr[A | B_i] = $ "$\bigcup_{k=1}^{\infty}$" $Pr[A_{i+k} | B_i]$ … Alice nahází více než i

· to je nějaké komplikované, možná tohle nebylo správné použití podmn. psl.

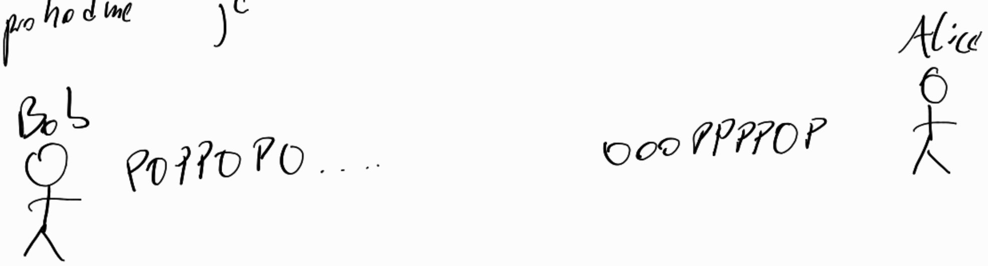
Krok zpět: co kdyby oba měli stejný počet mincí?

$Pr[A] = Pr[B] = \frac{1}{2}$ ... důvod?

třeba: (vyrobíme bijekci mezi stavy, kdy vyhraje Alice a stavy, kdy

· vezmeme výherní konfiguraci Alice a Boba

· a prohodíme je



· tohle je bijekce mezi výherními stavy, takže #případů, kdy vyhraje Alice je roven #případů, kdy vyhraje Bob

lepší analýza

$$Pr[A] = Pr[\text{Alice vyhraje} \mid \text{její } (n+1)\text{. mince je Orel}]\; Pr[\quad] +$$

+ „podobně pro Pannu"

$= \boxed{\text{„něco} > \tfrac{1}{2}\text{"}} \cdot \frac{1}{2} +$

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$

$> \frac{1}{2}$ ✓

(Prosecutor's fallacy) Ženě umřely 2 děti na Sudden Infant Death Syndrome, tj. jen tak samy od sebe ¯_(ツ)_/¯

Žaloba argumentuje: „Pst, že dítě umře na SIDS je nezávisle 10^{-5}. Pst, že je nevinná, je $(10^{-5})^2 = 10^{-10}$. To je málo... do vězení s ní!"

V čem je chyba? Jsou tam dvě.

- příště, potřebujeme Bayesovu větu