Házíme čtyřstěnnou kostkou. Pokud padne 1, házíme znovu.
Navrhněte vhodný pstní prostor.

$\Omega = \{$ „padlo 1", „padlo 2", „padlo 3", „padlo 4" $\}$

$Pr[$„padlo 1"$] = 0$, $Pr[$„padlo 2"$] = \dots = \frac{1}{3}$.

$\Omega = \{$„padlo 2", „padlo 3", „padlo 4"$\}$

$Pr[\omega] = \frac{1}{3}$ pro všechna $\omega \in \Omega$

Dokažte, že $Pr[\bigcup_{i=1}^{n} A_i] \leq \sum_{i=1}^{n} Pr[A_i]$, tzv. union bound.

- potřebujeme $B \subseteq A \Rightarrow Pr[B] \leq Pr[A]$
- $B \subseteq A \Rightarrow A = B \cup (B \cap \bar{A})$, a to jsou 2 disj. jevy

$\rightarrow Pr[A] = Pr[B] + \underbrace{Pr[B \cap \bar{A}]}_{\geq 0} \Rightarrow Pr[A] \geq Pr[B]$

- definujeme jev B_i jako $B_i := A_i \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_{i-1})$, $\{B_i\}_{i=1}^{n}$ jsou

disj. jevy a platí $Pr[\bigcup_{i=1}^{n} A_i] = Pr[\bigcup_{i=1}^{n} B_i] =$

$= \sum_{i=1}^{n} Pr[B_i] \leq \sum_{i=1}^{n} Pr[A_i]$

Narozeninový paradox: hashujeme n prvků a máme zcela náhodnou hashovací funkci. Tedy pokud hashujeme prvek $x \in \mathcal{U}$ do tabulky velikosti m, pak $\Pr[h(x) = j] = \frac{1}{m}$ pro všechna x a všechna $j \in [m]$.

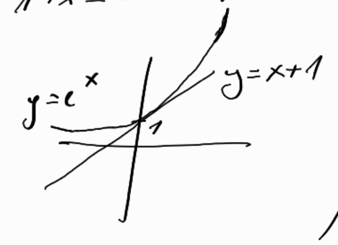
Ukažte, že pro nějakou konstantu c při hashování n prvků do $m = cn^2$ políček je pst. kolize aspoň $\frac{1}{2}$. Kolize prvků x a y znamená $h(x) = h(y)$.

- p_i : nenastane kolize při hashování i prvků
- $p_1 = 1$, jeden prvek nekoliduje
- $p_2 = 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{m}\right) \rightarrow$ druhý prvek se nesmí zahashovat tam, kam se zahashoval první prvek

$\vdots$

- $p_k = 1\left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{m}\right)$
- $p_k \leq 1 \cdot e^{-\frac{1}{m}} \cdot e^{-\frac{2}{m}} \cdot \ldots \cdot e^{-\frac{k-1}{m}} = e^{-\frac{1}{2m}k^2}$

$\left(1 + x \leq e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}\right)$



- zajímá nás takové k, aby $p_k \leq \frac{1}{2}$
- to třeba platí pro $k = \sqrt{2m} \rightarrow e^{-1} \leq \frac{1}{2}$
- stačí tedy $c \leq \frac{1}{2}$

Dokažte, že $Pr[A \cup B] = Pr[A] + Pr[B] - Pr[A \cap B]$.

- $A \cup B = A \cup (\bar{A} \cap B)$, což jsou disj. jevy!

$\rightarrow Pr[A \cup B] = Pr[A] + Pr[\bar{A} \cap B]$

- $B = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)$, taktéž disj. jevy!

$\rightarrow Pr[B] = Pr[A \cap B] + Pr[\bar{A} \cap B]$

- vyjádříme $Pr[\bar{A} \cap B]$

$Pr[A \cup B] - Pr[A] = Pr[B] - Pr[A \cap B]$ ✓

Házíme mincí, na které padá panna s pstí p a orel s pstí $1-p$ $(p \in (0, \frac{1}{2}])$. Jak dlouho musíme házet, než padne první panna?

- Zavedeme pro $i \in \{1, 2, \dots\}$ náhodné veličiny

$$X_i = \begin{cases} i & \text{pokud první panna padne v } i. \text{ hodu} \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

- $Pr[X_i = i] = (1-p)^{i-1} p$

- X: jak dlouho musíme čekat ve střední hodnotě, $X = \sum_{i=1}^{\infty} X_i$

- $\mathbb{E}[X_i] = i \cdot p \cdot (1-p)^{i-1}$
- $\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot p \, (1-p)^{i-1} = p \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot (1-p)^{i-1} =$

$$p \cdot \left(\begin{array}{l} 1 + 1-p + (1-p)^2 + \dots \\ \quad + 1-p + (1-p)^2 + \dots \\ \quad \quad \ddots \end{array} \right) = p \cdot \left(\begin{array}{l} \frac{1}{p} \\ + (1-p)\frac{1}{p} \\ + (1-p)^2 \frac{1}{p} \\ + \quad \vdots \end{array} \right) =$$

$$= 1 + (1-p) + (1-p)^2 + \dots = \frac{1}{p}.$$

<u>Př</u>: Jaká je pst. že budeme házet více než 10 krát?

- použijeme <u>Markovovu nerovnost</u>:

Pro nezápornou náhodnou veličinu $Y : \Omega \to \mathbb{R}_0^+$ a $\forall a \in \mathbb{R}^+$

platí $\Pr[Y \geq a] \leq \frac{\mathbb{E}[Y]}{a}$

- takže $\Pr[X \geq 10] \leq \frac{1}{10p}$

Nechť φ je libovolná CNF fle s n prom. a m klauzulemi. Např.

$$\varphi = (x_1 \lor x_2 \lor \overline{x_5}) \land (\overline{x_2} \lor \overline{x_3}) \land \dots$$

Ukažte, že existuje ohodnocení proměnných t. ž. alespoň polovina klauzulí je splněna.

- jednodušše použijeme náhodné ohodnocení proměnných
- jaká je pst, že klauzule je nesplněna?
- pro klauzuli s l literály existuje právě jedno

nesplňující ohodnocení $\rightarrow$ $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^l$

- použijeme linearitu střední hodnoty
- $$C_i = \begin{cases} 1 & \text{pokud naše náhodné ohodnocení splňuje } i\text{-tou klauzuli} \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

- C : počet splněných klauzulí

$\rightarrow C = \sum_{i=1}^{m} C_i$

- $\mathbb{E}[C] = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{E}[C_i] \geq m \cdot \frac{1}{2}$

- naše $\mathbb{E}[C]$ je průměr přes všechna splňující ohodnocení
- průměr $\leq$ max $\Rightarrow$ musí existovat ohodnocení splňující aspoň půlku

klauzulí

Každé dítě má stejnou pst, (nezávislou!) že bude chlapeček nebo holčička.

O dvou sourozencích víme, že starší je holčička. Jaká je šance, že mladší je holčička?

- z nezávislosti $\frac{1}{2}$

A co když víme, že aspoň jeden ze sourozenců je holčička?

Jaká je potom pst, že obě jsou holčičky?

- možnosti

  ~~(♂, ♂)~~ → tohle víme, že neplatí!

  (♀, ♂)

  (♂, ♀)

  (♀, ♀) $\longrightarrow \frac{1}{3}$