Intervalové odhady

1. Máme jedno měření $X \sim \mathcal{N}(\mu, 1)$. (Parametrem je tedy $\vartheta = \mu$.)

   a) Najděte jednostranný intervalový odhad $\mu \in [t, +\infty)$ se spolehlivostí 0.95..

   b) Najděte oboustranný intervalový odhad pro μ se spolehlivostí 0.95.

   c) Místo jednoho měření jich provedeme n (pochopitelně nezávislých). Jaký bude teď intervalový odhad pro μ?

   d) Nechť X má stále střední hodnotu μ a rozptyl 1, ale není už nutně normální. Co se změní?

Testování hypotéz

2. Máme jedno měření $X \sim \mathcal{N}(\mu, 1)$. Chceme ověřit hypotézu $H_0\colon \mu = 5$ s hladinou významnosti $\alpha = 0.05$.

   a) Jak zvolíme *kritický obor* – množinu řešení, kde hypotézu zamítneme?

   b) Místo jednoho měření jich nyní mějme n (pochopitelně nezávislých). Jaký je kritický obor pro $\overline{X_n}$?

   c) Pokud je ve skutečnosti $\mu = 4$ a máme $n = 10$ měření, jaká je pravděpodobnost, že hypotézu nezamítneme?

   d) Nechť X má stále střední hodnotu μ a rozptyl 1, ale už není nutně normální. Co se změní?

Srovnejte podobnost vašeho řešení s Příkladem 1.

Bodové odhady

3. Máme náhodný výběr $X_1, \dots X_n \sim \mathcal{U}(0, \vartheta)$.

   a) Navrhněte bodový odhad ϑ *momentovou metodou.*

   b) Navrhněte bodový odhad ϑ *metodou maximální věrohodnosti.*

   c) Pro každý z nich zjistěte, jestli je nestranný a konzistentní.

   d) Pro každý z nich spočtěte střední kvadratickou odchylku (MSE).

   e) Který odhad je lepší? Napadá vás nějaký ještě lepší?

4. Dokažte, že výběrový průměr $s_n = (x_1 + \dots x_n)/n$ je nestranným odhadem střední hodnoty.

5. Odhadneme rozptyl statistikou $q_n = \frac{1}{n}\sum_i (x_i - s_n)^2$. Ukažte, že to není nestranný odhad. V čem je problém a jak to napravíme?