

Samplování

1. Necht $U \sim \mathcal{U}(0, 1)$. Vytvořte pomocí U náhodnou veličinu s
 - a) rozdělením $\mathcal{U}(a, b)$,
 - b) rozdělením $\text{Exp}(\lambda)$,
 - c) Cauchyho rozdělením,
 - d) rozdělením $\mathcal{N}(0, 1)$.

Představa je taková, že máme generátor uniformně náhodného reálného čísla mezi 0 a 1 a chceme pomocí něj vyrobit generátor náhodného čísla podle libovolné distribuce.

Nápověda. Pro náhodnou veličinu X je *kvantilová funkce* $Q_X(p) = \min\{x \in \mathbb{R}: p \leq F_X(x)\}$. Pro spojitou F_X platí $F_X = Q_X^{-1}$. Pro naši U z přednášky víme

- $F_X(X) = \mathcal{U}(0, 1)$,¹
- $Q_X(U)$ je náhodná veličina s distribuční funkcí F_X .

Spojité vektory

2. Necht X a Y mají sdruženou hustotu $f_{X,Y}(x, y) = e^{-x-y}$ pro $x, y > 0$ (a 0 jinak).
 - a) Určete marginální hustoty f_X a f_Y .
 - b) Určete distribuční funkce $F_X, F_Y, F_{X,Y}$.
 - c) Jsou X a Y nezávislé?
 - d) Najděte $\Pr[X + Y \leq 1]$ a $\Pr[X > Y]$.

Podmíněná hustota

3. Necht X a Y mají sdruženou hustotu

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-y} & \text{pro } 0 < x < y < \infty, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

- a) Určete $f_{X|Y}$.
- b) Určete $f_{Y|X}$.

Nerovnosti a Centrální limitní věta

4. Chceme počítat obsah kruhu samplováním. Vygenerujeme náhodný bod v jednotkovém čtverci, tj. obě souřadnice vygenerovaného bodu jsou rozdělené podle $\mathcal{U}(0, 1)$. Necht X_i je indikátor jevu „ i -tý vygenerovaný bod je uvnitř kružnice vepsané čtverci“.
 - a) Určete $\mathbb{E}[X_i]$ a $\text{Var}[X_i]$.
 - b) Necht $S_n = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$. Spočtěte $\mathbb{E}[S_n]$ a $\text{Var}[S_n]$.
 - c) Pro jaké n čekáte, že výsledek bude správný na jedno desetinné místo? Co na dvě, tři, ...?

¹ $F_X(X)$ je objekt typu funkce náhodné veličiny X , tedy další náhodná veličina.