Nechť X a Y jsou náhodné veličiny patřící témuž experimentu.

- *Sdružená pravděpodobnostní funkce* $p_{X,Y}(x,y)$ je definována jako

$$p_{X,Y}(x,y) = \Pr[X = x, Y = y] = \Pr[\{X = x\} \cap \{Y = y\}].$$

- *Marginální pravděpodobnostní funkci* X lze získat ze sdružené pravděpodobnostní funkce jako

$$p_X(x) = \sum_y p_{X,Y}(x,y).$$

  Pro $p_Y(y)$ lze postupovat obdobně.

- Funkce g náhodných veličin X a Y je opět náhodná veličina. Tedy $g(X,Y)$ je technicky vzato funkce, která elementárním jevům přiřazuje reálná čísla. Navíc platí

$$\mathbb{E}[g(X,Y)] = \sum_x \sum_y g(x,y) p_{X,Y}(x,y).$$

---

1. Ze standardního balíčku s 52 kartami vytáhneme dvě karty. Označme X počet vytažených králů a Y počet vytažených es. Určete sdruženou pravděpodobnostní funkci $p_{X,Y}$ a marginální pravděpodobnostní funkce p_X a p_Y.

2. Koupili jsme si 100 akcií společnosti A a 200 akcií společnosti B. Nechť X a Y jsou náhodné veličiny měřící změnu ceny akcie A resp. B během nějakého časového úseku. Předpokládejme, že sdružená pravděpodobnostní funkce $p_{X,Y}$ je rozdělená uniformně na hodnotách x a y splňujících

$$-2 \leq x \leq 4, \qquad -1 \leq y - x \leq 1.$$

   Nalezněte marginální pravděpodobnostní funkce pro X a Y. Nalezněte $\mathbb{E}[X]$ a $\mathbb{E}[Y]$. Nalezněte střední hodnotu našeho profitu.

3. Házíme férovou čtyřstěnnou kostkou. Rozhodli jsme se zvětšit výsledek našeho hodu tak, že budeme házet třemi kostkami a za výsledek prohlásíme maximum z těchto tří hodů. Nechť X_1, X_2 a X_3 jsou výsledky jednotlivých hodů a $X = \max\{X_1, X_2, X_3\}$. Jaká je pravděpodobnostní funkce X? Kolik je $\mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X_1]$? Pomohli jsme si?

4. Chceme otevřít dveře od učebny a od sekretářky jsme dostali kroužek s pěti klíči. Nevíme ale, který z nich je správný :(. Jak rychle najdeme správný klíč, pokud použijeme následující strategie?

   a) Vybíráme klíč náhodně. Pokud vyzkoušený klíč nesedí, tak opět vybíráme náhodně ze všech klíčů. Může se tedy stát, že vyzkoušíme několikrát za sebou tentýž klíč.

   b) Vybíráme klíč náhodně. Pokud vyzkoušený klíč nesedí, tak si ho označíme a už ho nezkoušíme znovu.

   Pojmenujte rozdělení těchto náhodných veličin a určete jejich střední hodnoty.

5*. Dokázali byste předchozí úlohu řešit, kdyby klíčů bylo n a správných klíčů bylo $m < n$?

6*. Vysílač vyšle 1 s pravděpodobností p a 0 s pravděpodobností $1 - p$, nezávisle na předchozích vyslaných bitech. Pokud počet vyslaných bitů za nějaký časový okamžik je rozdělen Poissonovsky s parametrem λ, ukažte, že počet vyslaných jedniček (za tentýž časový okamžik) je taktéž rozdělen Poissonovsky, ale s parametrem $p\lambda$.