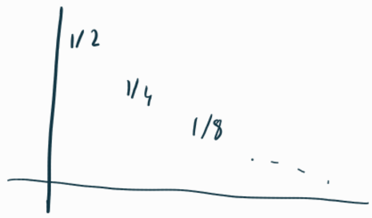
1. Coin flips: A fair coin is flipped until the first head occurs. Let X denote the number of flips required.

a) Find $H(X)$

b) A r.v. X is drawn according to this distribution. Find an "efficient" sequence of YES-NO questions of the form "Is X contained in set S" to determine the value of X. Compare this value with $H(X)$.

a) $H(X) = -\sum_{k=1}^{\infty} \Pr[X=k] \lg \Pr[X=k]$

$$= -\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \lg \left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k k = \frac{\frac{1}{2}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = 2$$



b)

$1 \to 0$

$2 \to 10$

$3 \to 110$

$4 \to$

$$\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot 3 + \dots$$

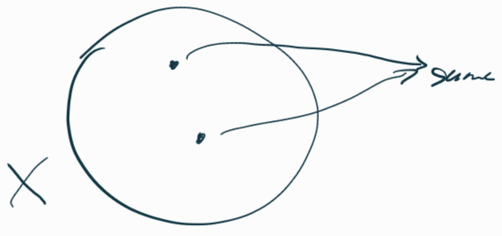
$$= k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = 2$$

→ keep asking $X=1$? $X=2$? ....

2.1 Let X be a finite r.v. What is the (general) ineq. relationship between $H(X)$ and $H(Y)$?

- $Y = 2^X$
- $Y = \cos X$

- $H(2^X) = H(X)$ because it's an injective fct



$\cos X$? Will it decrease entropy?

Yes as lg is subadditive

3) Let X be an r.v. and g a fct of X. Show that $H(g(X)) \leq H(X)$ by justifying the following steps.

$$\begin{aligned} H(X, g(X)) &= H(X) + H(g(X) \mid X) \\ &= H(X) \end{aligned}$$

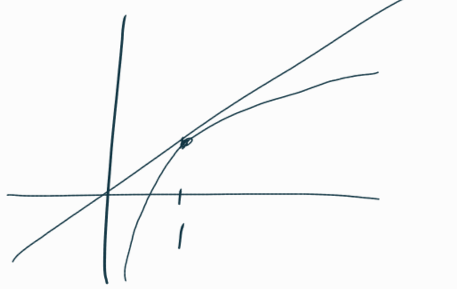
$$\begin{aligned} H(X, g(X)) &= H(g(X)) + H(X \mid g(X)) \\ &\geq H(g(X)) \end{aligned}$$

Thus $H(X) \geq H(g(X))$

- $H(g(X) \mid X)$ is 0 because once we have a fixed X, then we know $g(X)$ exactly
  - $\rightarrow$ no surprise $\rightarrow H(g(X) \mid X) = 0$
- $$\begin{aligned} H(X \mid g(X)) &= -\sum_{x \in X} \Pr[g(X) = x] \sum_{x' \in X} \Pr[X = x' \mid g(X) = x] \lg \Pr[X = x' \mid g(X) = x] \\ &= \sum_{x, x' \in X} \Pr[g(X) = x \,\&\, X = x'] \lg \Pr[X = x' \mid g(X) = x] \\ &\geq \sum_{x \neq x' \in X} \_\_\_\_\_\_ \lg \_\_\_\_\_\_ \\ &\ldots \end{aligned}$$

Ukažte

1) $\lg x \le x - 1$



2) $-D(p\|q) = \sum_x p(x) \lg \frac{q(x)}{p(x)} \le \sum_x p(x)\left(\frac{q(x)}{p(x)} - 1\right) \le 0$

Vrna má c červených míčků a m modrých. Postupně vytáhneme k míčků. Buď můžeme tahat s vracením či bez. Jaká distribuce má větší entropii?

- nechť $X_1, X_2, \dots$ značí to, co jsem vytáhl za míček s vracením
- — $Y_1, Y_2, \dots$ — " — bez vracení

předp. m vytažení

- srovnáváme $H(X_1, \_\_)$ a $H(Y_1, \dots)$
- řetízkové pravidlo $H(X_1, \dots) = H(X_1) + H(X_2, \dots \mid X_1) = \sum_{i=1}^{m} H(X_i \mid X_{i-1}, \dots, X_1)$

$H(Y_1, \dots) = H(Y_1) + H(Y_2, \dots \mid Y_1) = \sum_{i=1}^{m} H(Y_i \mid Y_{i-1}, \dots, Y_1)$

- pro každý sčítanec $H(X_i | X_{i-1}, \dots, X_1)$ tvrdím, že je aspoň $H(Y_i | Y_{i-1}, \dots, Y_1)$
- to je kvůli tomu, že X_i je nezávislé na předchozích zatímco Y_i ne
- a „podmiňování" může entropii jen snížit $\square$

Na tomto příkladu uvidíme, že entropie může být nekonečná. Nechť $A = \sum_{n=2}^{\infty} (n \lg^2 n)^{-1}$. Musíte mi věřit, že A konverguje. Ukažme, že n.v. X s

$$\Pr[X=n] = (An\lg^2 n)^{-1} \quad \text{má} \quad H(X) = \infty \quad \text{pro } n = 2, 3, \dots$$

$$H(X) = \sum_{n=2} \Pr[X=x] \lg \frac{1}{\Pr[X=x]} = \sum_{n=2}^{\infty} (An\lg^2 n)^{-1} \lg(An\lg^2 n) = \sum_{n=2}^{\infty} (An\lg^2 n)^{-1} \left[\lg A + \lg n + \lg\lg^2 n\right]$$

$$= \left(\sum_{n=2}^{\infty} \lg A (An\lg^2 n)^{-1}\right) + \left(\sum_{n=2}^{\infty} (An\lg n)^{-1}\right) + \sum_{n=2}^{\infty} (An\lg^2 n)^{-1} \lg\lg^2 n \geq$$

$$\geq 0 + \sum_{n=2} \frac{1}{An\lg n} + 0 > \int_2^{\infty} \frac{1}{Ax\lg x}\,dx = \Omega\left(\left[\ln\ln x\right]_2^{\infty}\right) = \Omega(\infty)$$