1. Nechť G je rovinný graf, který má n vrcholů, m hran a k komponent souvislosti. Kolik stěn bude mít jeho nakreslení?

2. Dokažte, že doplněk rovinného grafu s 11 vrcholy nemůže být rovinný.

3. Viděli jste, že K_5 nejde nakreslit na plochu. Jde ale nakreslit na jiné povrchy? Například na torus (tj. pneumatika) nebo na Möbiovu pásku (tj. vysoký pruh papíru, který chytneme za dolní dva pruhy, prohodíme je a dolní konec slepíme s horním)?

4. Dokažte větu o čtyřech barvách pro rovinné grafy bez trojúhelníků.

5. Ukažte, že pokud má rovinný graf sudé stupně, pak jeho duál jde obarvit nejvýše dvěma barvami.

6. Graf se nazývá *vnějškově rovinný* (anglicky *outerplanar*), pokud se dá nakreslit tak, aby všechny vrcholy sousedily se vnější stěnou. Kolik může takový graf mít maximálně hran vzhledem k počtu vrcholů?

7. Dokažte či vyvraťte, že pokud G je graf s průměrným stupněm $d = \frac{1}{n}\sum_{u \in V(G)} \deg(u)$, pak existuje podgraf $H \subseteq G$ takovy, že průměrný stupeň H je aspoň $d/2$.

   Uměli byste totéž, kdybych požadoval, aby H byl bipartitní graf?

   Ochutnávka dalšího studia kombinatoriky.

   Pravděpodobnostní metoda. Představte si, že máte množinu objektů M. Teď si namyslíte nějakou vlastnost V a ptáte se, jestli existuje objekt z množiny M s vlastností V. Postup, který se používá v pravděpodobnostní metodě je následující. Označme P jako množinu všech objektů z M s vlastností V. Z nějakého důvodu je těžké určit množinu P nebo $M \setminus P$, jinak bychom byli hotoví. Místo toho ale umíme popsat $M \setminus P$ jako sjednocení nějakých množin $Q_1 \cup Q_2, \cdots \cup Q_q$, a určit Q_i je jednoduché. Kdyby platilo, že $|Q_1 \cup \cdots \cup Q_q| = |M \setminus P| < |M|$, tak množina P je neprázdná a jsme hotovi. Nojo, ale určit $Q_1 \cup \cdots \cup Q_q$ může být dost těžké. Naštěstí nás zajímá jen počet, takže můžeme použít hrubý horní odhad $|Q_1 \cup \cdots \cup Q_q| \leq |Q_1| + |Q_2| + \cdots + |Q_q|$ a doufat, že to výjde. Tedy, že $|M \setminus P| \leq |Q_1| + |Q_2| + \cdots + |Q_q| < |M|$. Proč se tomu říká pravděpodobnostní metoda? Protože na to můžeme koukat tak, že chceme, aby pravděpodobnost, že uniformně náhodně vybraný objekt $m \in M$ bude patřit do jedné z množin Q_i, byla ostře menší než 1.

8. Nechť $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ a $n = 2^{2^{2^k}}$. Ukažte, že každý graf na n vrcholech obsahuje buď nezávislou množinu nebo úplný graf velikosti k.

   Tady je množina M množina všech grafů na n vrcholech.

   Pro jak malé n je tohle ještě pravda?

   Extremální teorie grafů.

9. Chceme vyrobit graf na n vrcholech, který nesmí mít žádné trojúhelníky. Kolik může mít maximálně hran (označme jako M)? Je to razantně méně než $\binom{n}{2}$, je tedy $\lim_{n\to\infty} \frac{M}{\binom{n}{2}} = 0$?

   Kombinatorická geometrie.

10. Představte si, že máte na stole jehlu nekonečně tenkou jednotkové délky, kterou namočíme do inkoustu. Chcete jí otáčet po stole tak, aby ve výsledku oba konce ukazovaly všemi možnými směry. Tedy vždy by měla ležet na stole a nikdy nebude ukazovat nahoru. Jelikož je jehla namočená do inkoustu, tak při otáčení bude nechávat po stole (souvislou) šmouhu, která má nějaký obsah. Jak malý může tento obsah být? Tedy, vytvořte otáčecí postup, který nechá po sobě šmouhu minimálního obsahu.

11. A opačně: nakreslím Vám pravidelný šestiúhelník s jednotkovou délkou hrany. Jaká je největší jehla, kterou dokážete tento šestiúhelník zreprodukovat procesem výše?