

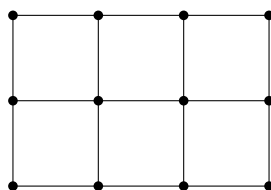
1. Určete počet kružnic v grafu K_n , kde rozlišujeme vrcholy a kružnice se jmenují podle toho, jaké vrcholy v ní jsou. Výsledek vyjádřete sumou.
2. Určete počet kružnic v grafu K_n , kde rozlišujeme vrcholy a kružnice se jmenují podle toho, jaké vrcholy v ní jsou. Výsledek vyjádřete sumou.
3. Dokažte, že hrany každého eulerovského grafu G lze rozložit na disjunktní sjednocení kružnic. Tedy, že v něm dokážete najít kružnice C_1, \dots, C_k takové, že každá hrana G leží v právě jedné z kružnic.

Definice. *Line graf* H grafu G je graf, jehož vrcholy představují hrany G a mezi dvěma vrcholy H je hrana, pokud hrany odpovídající těmto vrcholům v G sdílely vrchol.

4. Dokažte, že line graf eulerovského grafu je eulerovský.
5. Nechť $X = \{1, \dots, n\}$ a \mathcal{A} je podmnožina $\mathcal{P}(X)$ taková, že pokud $A \in \mathcal{A}$ a $B \in \mathcal{A}$, pak i jejich symetrický rozdíl $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ je v \mathcal{A} .

Charakteristický vektor nějaké podmnožiny $C \subseteq \{1, \dots, n\}$ je vektor délky n takový, že má na i -té pozici 1 právě, když $i \in C$.

- a) Ukažte, že charakteristické vektory \mathcal{A} společně s operací symetrické difference tvoří vektorový prostor nad \mathbb{Z}_2 .
 - b) V závislosti na velikosti \mathcal{A} určete dimenzi tohoto prostoru. Jakých hodnot může $|\mathcal{A}|$ nabývat?
6. Určete dimenzi prostoru cyklů mřížky $m \times n$.



Obrázek 1 Mřížka 3×4 .

7. Dokažte, že každý strom na alespoň dvou vrcholech obsahuje alespoň dva listy. (Na přednášce bylo, že každý strom má aspoň jeden list.)
8. Dokažte, že obsahuje-li strom vrchol stupně k , pak je v něm alespoň k listů.
9. Dokažte, že každý strom na n vrcholech má nezávislou množinu velikosti $\lceil \frac{n}{2} \rceil$.
10. Kolik existuje cest takových, že jsou izomorfní svému doplňku? Proč neexistují žádné další?
11. Na přednášce jste viděli Jarníkův algoritmus pro hledání minimální kostry. Uměli byste vymyslet algoritmus, který hledá maximální kostru? Tj. kostru takovou, že součet jejich hran je aspoň tolik, co součet hran libovolné jiné kostry?