1. Nechť G je orientovaný graf. Dokažte, že následující tvrzení jsou si ekvivalentní:

   (i) graf G obsahuje uzavřený orientovaný Eulerovský tah,

   (ii) graf G je silně souvislý a vstupní stupeň je roven výstupnímu stupni u každého vrcholu,

   (iii) graf G je slabě souvislý a vstupní stupeň je roven výstupnímu stupni u každého vrcholu,

2. Mějme posloupnost čísel $1 \leq d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$. Dokažte, že $\sum_{k=1}^{n} d_i = 2n - 2$ právě, když existuje strom se skóre $(d_1, \ldots, d_n)$.

3. Rozhodněte, zda platí následující tvrzení: graf $G = (V, E)$ je strom právě, když neobsahuje kružnice a platí $|V| = |E| + 1$.

4. Ukažte, že vrcholy každého stromu s n vrcholy jde uspořádat jako $u_1, \ldots, u_n$ tak, že v_i má právě jednoho souseda mezi vrcholy $u_1, \ldots, u_{i-1}$.

   Definice. Nechť G je graf. Pokud pro hranu $e \in E$ platí, že po odebrání z G bude graf $G \setminus e$ nesouvislý, tak říkáme, že e je *most.*

5. Ukažte, že každá kostra souvislého grafu obsahuje všechny mosty.

6. Uvažme strom takový, že každý vnitřní vrchol (tj. vrcholy, které nejsou listy) má stupeň právě 3. Dokážete najít nějaký vztah mezi počtem vnitřních vrcholů a počtem listů?

7. Pro která n existuje graf s právě n kostrami?

8. Uvažme následující algoritmus pro hledání minimální kostry v grafu G.

   1. Nejprve seřadíme všechny hrany vzestupně dle jejich vah a dostáváme posloupnost hran $e_1, e_2, \ldots, e_m$ takovou, že $w(e_1) \leq w(e_2) \leq \cdots \leq w(e_m)$.
   2. Začneme s prázdnou kostrou $S = \emptyset$.
   3. Pro i od 1 do m provádíme následující: Pokud $S \cup \{e_i\}$ neobsahuje cyklus, pak přidáme e_i do S.

   Vytvoří tento algoritmus minimální kostru? Proč (ne)? Jak rychle jej umíte implementovat?