

1. Kolika způsoby jde postavit do řady Sněhurku a 7 trpaslíků tak, aby Šmudla neseděl vedle Sněhurky? Co když je chceme postavit do kruhu?
2. Kolika způsoby lze rozestavit 5 vodníků a 7 čarodějnic do řady tak, aby žádní dva vodníci nestáli vedle sebe?
3. Kolik čísel zbude z  $1, \dots, n$  po vyškrtání násobků 2, 3, 5 a 7? Vyřešte nejprve obecně a pak určete přesný výsledek pro  $n = 999$ .
4. Na plese je  $n$  párů. Kolik je rozdělení do dvojic takových, že žádný pár netančí spolu?
5. Určete počet permutací s právě jedním pevným bodem. Uměli byste to i s  $k$  pevnými body?
6. Kolik existuje permutací množiny  $\{1, \dots, 2n\}$ , ve kterých se žádné sudé číslo nezobrazí samo na sebe.
7. Nechtě  $\phi(n)$  značí počet čísel z  $\{1, 2, \dots, n\}$  takových, že jsou nesoudělné s  $n$ .  
Pokud jsou  $p, q$  a  $r$  tři různá prvočísla, kolik je  $\phi(pqr)$ ?  
Co když máme různá prvočísla  $p_1, p_2, \dots, p_k$ , kolik je  $\phi(p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k)$ ?
8. Je pravda, že  $\phi(n \cdot m) = \phi(n) \cdot \phi(m)$  pro libovolná dvě přirozená čísla  $n, m$ ?
9. Je-li  $p$  prvočísla, kolik je  $\phi(p^k)$ ?
10. Nechtě  $p_1 p_2 \dots p_n$  je permutace na  $n$  prvcích. O indexu  $i$  řekneme, že je *vrcholkem*, pokud  $p_i > i$ . Kolik existuje permutací na  $n$  prvcích pro  $n \geq 3$  takových, že  $n - 1$  nebo  $n - 2$  jsou vrcholky?
11. Nechtě  $p_1 p_2 \dots p_n$  je permutace na  $n$  prvcích. O indexu  $i$  řekneme, že je *svahem*, pokud  $p_i > p_{i+1}$ . Kolik existuje permutací na 8 prvcích takových, že jejich svahy jsou podmnožinou  $\{2, 3, 5\}$ ?
- 12\*. Kolik existuje permutací  $p_1 p_2 \dots p_n$  na  $n$  prvcích takových, že mají právě dva svahy?
13. Dokažte kombinatorickou úvahou:
  - a)  $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$ ,
  - b)  $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$ ,
  - c)  $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \binom{n}{n-i} = \binom{2n}{n}$ ,
  - d)  $\sum_{k=0}^r \binom{n}{k} \binom{m}{r-k} = \binom{m+n}{r}$ .
  - e)  $\binom{r}{r} + \binom{r+1}{r} + \dots + \binom{n-1}{r} + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r+1}$ .
14. Sečtěte
  - a)  $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$ ,
  - b)  $\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{4n}{2k}$ .