

Matematické dovednosti - důkazy

1. **Přímý důkaz.** Dokažte:

- a) Pokud n a m jsou lichá, $n + m$ je sudé.
- b) Pokud n je sudé a m je liché, $n + m$ je liché.
- c) Pokud n a m jsou sudá, $n + m$ je sudé.
- d) Pokud n a m jsou lichá, $n \cdot m$ je liché, jinak $n \cdot m$ je sudé.

2. **Nepřímý důkaz.** Nechť n je přirozené číslo. Dokažte:

- a) Pokud n^2 je liché, pak n je liché.
- b) Pokud n^2 je sudé, pak n je sudé.
- c) Číslo n^2 je liché právě tehdy, když n je liché.
- d) Je-li číslo zapsané v desítkové soustavě pomocí samých jedniček prvočíslo, počet použitých jedniček je také prvočíslo.

3. **Důkaz sporem.** Dokažte:

- a) Pokud s a t jsou druhé mocniny přirozených čísel a jsou lichá, pak jejich součet není druhá mocnina přirozeného čísla.
- b) Pokud a, b a c jsou lichá čísla, pak rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ nemá žádné celočíselné řešení. (Hint: Diskutujte zvlášť případ, že x je sudé a x je liché.)
- c) Pokud a, b a c jsou lichá čísla, pak rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ nemá žádné racionální řešení. (Hint: Uvažujte $x = p/q$ a diskutujte různé kombinace parity p a q .)
- d) Dokažte, že $\sqrt{2}$ je iracionální.

4. **Důkaz indukcí.** Fibonacciho posloupnost (F_i) je definovaná následovně: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ a $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ pro $n > 1$. Dokažte:

- a) $\sum_{i=1}^n F_i = F_{n+2} - 1$
- b) $\frac{1,6^n}{3} < F_n < 1,7^n$ pro $n > 0$
- c) F_n a F_{n+1} jsou nesoudělná.