

## Matematické dovednosti - důkazy

1. **Přímý důkaz.** Dokažte:

- Pokud  $n$  a  $m$  jsou lichá,  $n + m$  je sudé.
- Pokud  $n$  je sudé a  $m$  je liché,  $n + m$  je liché.
- Pokud  $n$  a  $m$  jsou sudá,  $n + m$  je sudé.
- Pokud  $n$  a  $m$  jsou lichá,  $n \cdot m$  je liché, jinak  $n \cdot m$  je sudé.

2. **Nepřímý důkaz.** Nechtě  $n$  je přirozené číslo. Dokažte:

- Pokud  $n^2$  je liché, pak  $n$  je liché.
- Pokud  $n^2$  je sudé, pak  $n$  je sudé.
- Číslo  $n^2$  je liché právě tehdy, když  $n$  je liché.
- Je-li číslo zapsané v desítkové soustavě pomocí samých jedniček prvočíslo, počet použitých jedniček je také prvočíslo.

3. **Důkaz sporem.** Dokažte:

- Pokud  $s$  a  $t$  jsou druhé mocniny přirozených čísel a jsou lichá, pak jejich součet není druhá mocnina přirozeného čísla.
- Pokud  $a, b$  a  $c$  jsou lichá čísla, pak rovnice  $ax^2 + bx + c = 0$  nemá žádné celočíselné řešení. (Hint: Diskutujte zvlášť případ, že  $x$  je sudé a  $x$  je liché.)
- Pokud  $a, b$  a  $c$  jsou lichá čísla, pak rovnice  $ax^2 + bx + c = 0$  nemá žádné racionální řešení. (Hint: Uvažujte  $x = p/q$  a diskutujte různé kombinace parity  $p$  a  $q$ .)
- Dokažte, že  $\sqrt{2}$  je iracionální.

4. **Důkaz indukcí.** Fibonacciho posloupnost  $(F_i)$  je definovaná následovně:  $F_0 = 0$ ,  $F_1 = 1$  a  $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$  pro  $n > 1$ . Dokažte:

- $\sum_{i=1}^n F_i = F_{n+2} - 1$
- $\frac{1,6^n}{3} < F_n < 1,7^n$  pro  $n > 0$
- $F_n$  a  $F_{n+1}$  jsou nesoudělná.