1 Číselné obory a jejich vlastnosti

Známe následující číselné obory:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\} && \text{přirozená čísla}\\
&\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} && \\
&\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\} && \text{celá čísla}\\
&\mathbb{Q} = \{\frac{k}{n} \mid k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\} && \text{racionální čísla}
\end{aligned}$$

A víme, že $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Můžeme říci, že množina $\mathbb{Q}$ je „větší“ než množina $\mathbb{N}$? Obě mají nekonečně mnoho prvků. *Mohutnost množiny* je pojem pro velikost množiny. V případě konečných množin je to počet prvků.

Definice 1.1. Dvě množiny M a N mají stejnou *mohutnost*, pokud existuje bijekce z A do B. Množina M je *spočetná* pokud má stejnou mohutnost jako $\mathbb{N}$.

Snadno nahlédneme, že množina celých čísel je spočetná, stačí ji přeuspořádat: $\mathbb{Z} = \{0, -1, 1, -2, 2, \ldots\}$. Množina racionálních čísel je také spočetná, potřebnou bijekci lze zkonstruovat seřazením zlomků v základním tvaru v pořadí, v jakém je prochází šipka na Obrázku 1.1.

Alternativně můžeme každé racionální číslo reprezentovat *desetinným rozvojem*. Tento desetinný rozvoj bude vždy konečný nebo periodický.

Definice 1.2. *Množina reálných čísel* $\mathbb{R}$ je tvořena všemi desetinnými rozvoji

$$\pm d_0, d_1 d_2 d_3 \ldots$$

kde $d_0 \in \mathbb{N}_0$ a $d_i \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, 9\}$ pro $i \in \mathbb{N}$.

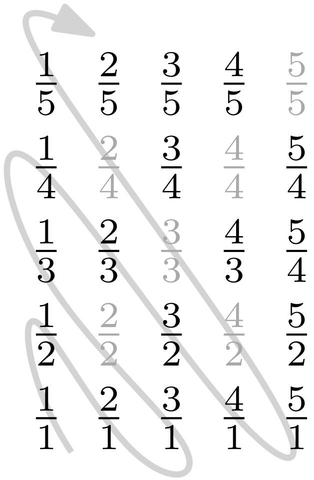
Pozor: Jednomu reálnému číslu může odpovídat více než jeden desetinný rozvoj. Konkrétně: $+0,000\ldots = -0,000\ldots$ a $1,000\ldots = 0,999\ldots$.

Čísla v $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nazýváme *iracionální*.

Věta 1.3 (Iracionalita $\sqrt{2}$)**.** *$\sqrt{2}$ je iracionální.*

Věta 1.4 (Hustota racionálních čísel.)**.** *Pro každá dvě reálná čísla a a b, taková že $a < b$ existuje racionální číslo q takové, že $a < q < b$.*

Důkaz. Cvičení. □



Obrázek 1.1: Bijekce mezi přirozenými čísly a kladnými zlomky v základním tvaru.

Této vlastnosti se říká, že racionální čísla jsou *hustá podmnožina* reálných čísel. Podobně i iracionální čísla jsou hustá podmnožina reálných čísel.

Věta 1.5 (Nespočetnost reálných čísel.)**.** *Množina reálných čísel není spočetná.*

Důkaz. Pro spor předpokládejme, že existuje posloupnost reálných čísel $(a_1, a_2, \dots)$ taková, že zobrazení $f(n) = a_n$ je bijekce z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{R}$. Pro $m, n \in \mathbb{N}$ si jako $a_n(m)$ označíme m-tou cifru za desetinnou čárkou v dekadickém rozvoji čísla a_n; má-li rozvoj jen konečně mnoho cifer za desetinnou čárkou, doplníme je nekonečně mnoho nulami, a v případě dvojznačného dekadického rozvoje (například $134{,}300684999999\dots$ a $134{,}300685000000\dots$ je totéž reálné číslo) volíme rozvoj s konečně mnoha devítkami. Číslo α pak definujeme dekadickým rozvojem

$$\alpha = 0{,}b_1 b_2 b_3 \dots,$$

kde n-tá cifra b_n je dána vztahem

$$b_n = \begin{cases} a_n(n) + 1 & \text{pro } 0 \le a_n(n) < 8 \text{ a} \\ a_n(n) - 1 & \text{pro } a_n(n) = 8 \text{ nebo } 9. \end{cases}$$

V tomto rozvoji se za desetinnou čárkou nevyskytuje ani jedna devítka a je tedy jednoznačný. Dále $b_n \neq a_n(n)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Tudíž $\alpha \neq a_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Zobrazení f tedy není na (surjektivní), což je spor s předpokladem, že je to bijekce. □

Dále ještě máme obor komplexních čísel $\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$, zabývat se jimi budeme pouze okrajově. Množiny $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$ jsou (algebraická) *tělesa.*

Relace $\geq$ definuje *uspořádání* na reálných (a tedy i racionálních) číslech, které se navíc „hezky chová“ vůči aritmetickým operacím; pokud $a < b$, $a +$

$c < b + c$ pro libovolné c a $ac < bc$ pokud $c > 0$. Říkáme proto, že $\mathbb{R}$ a $\mathbb{Q}$ jsou *uspořádaná* tělesa. Naopak $\mathbb{C}$ uspořádané není - prvky $\mathbb{C}$ sice lze nějak uspořádat, ale neexistuje uspořádání, které by mělo výše popsané vlastnosti vůči aritmetickým operacím.

Definice 1.6. Nechť M je množina s uspořádáním $\succeq$ a $A \subset M$.

- Množina A je *shora omezená* pokud existuje $m \in M$ takové, že $m \succeq a$ pro každý prvek $a \in A$. Takovému m říkáme *horní závora množiny* A.
- Prvek $m \in M$ je *supremum množiny* A, pokud m je nejmenší horní závora A. Zapisujeme $m = \sup A$.
- Prvek $m \in A$ je *maximum množiny* A, pokud pro každé $a \in A$ platí, že $m \succeq a$. Zapisujeme $m = \max A$.
- Množina A je *zdola omezená* pokud existuje $m \in M$ takové, že $a \succeq m$ pro každý prvek $a \in A$. Takovému m říkáme *dolní zavora množiny* A.
- Prvek $m \in M$ je *infimum množiny* A, pokud m je největší dolní závora A. Zapisujeme $m = \inf A$.
- Prvek $m \in A$ je *minimum množiny* A, pokud pro každé $a \in A$ platí, že $a \succeq m$. Zapisujeme $m = \min A$.
- Množina A je *omezená* pokud je shora a zdola omezená.

Pokud množina není shora omezená, nemá podle výše uvedené definice supremum ani maximum, množina, která není zdola omezená naopak nemá minimum ani infimum. Pro množiny čísel se obvykle dodefinuje, že supremem shora neomezené množiny je $+\infty$ a infimem zdola neomezené množiny je $-\infty$. V případě prázdné množiny pak definujeme její supremum jako $-\infty$ a infimum jako $+\infty$. Maximum, respektive minimum ale neexistuje.

Obecně neplatí, že shora omezená množina musí mít maximum a supremum. Pokud maximum existuje, existuje i supremum a jsou si rovny. Totéž platí pro infimum a minimum.

Příklad 1.7. Nechť $M = \mathbb{R}$ a A je otevřený interval $(0, 1)$. Pak A je shora omezená množina - například 1 je její horní závora, ale nemá maximum.

Příklad 1.8. Nechť $M = \mathbb{R}$ a $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ splňuje $\sup A = \max A = 1$ a $\inf A = 0$ a nemá minimum. Protože $1 \in A$ a všechny prvky A jsou zjevně menší nebo rovny 1, je 1 maximem a zároveň supremem A. Všechny prvky A jsou kladné, 0 je tedy dolní závorou A. Sporem ukážeme, že nemůže existovat žádná větší dolní závora a 0 je tedy infimem množiny A. Předpokládejme, že $\varepsilon > 0$ je dolní závorou A. Uvažme přirozené číslo n splňující $n > \frac{1}{\varepsilon}$ (takové číslo vždy existuje, například $n = \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil + 1$). Pak $\frac{1}{n} < \varepsilon$ a zároveň $\frac{1}{n} \in A$, což je spor s tím, že je ε dolní závorou A. Dokázali jsme tedy, že $\inf A = 0$. Protože $0 \notin A$, A nemá minimum.

Příklad 1.9. Nechť $M = \mathbb{Q}$ a A je množina racionálních čísel q splňujících $q^2 < 2$. Tato množina je rovněž shora omezená, každé racionální číslo větší než $\sqrt{2}$ (například 2) je její horní závora, ale nemá dokonce ani supremum v $\mathbb{Q}$ - neexistuje nejmenší horní závora.

Věta 1.10 (Úplnost reálných čísel)**.** *Každá neprázdná shora omezená podmnožina* $\mathbb{R}$ *má supremum.*

Větu nebudeme dokazovat. Rozmyslete si, že z ní plyne, že každá neprázdná zdola omezená podmnožina $\mathbb{R}$ má infimum. Této vlastnosti reálných čísel se říká *úplnost*. Je to klíčová vlastnost pro mnoho dalších věcí, které považujeme za samozřejmé, například umožňuje smysluplnou definici funkcí e^x a $\sin x$. Z Příkladu 1.9 naopak plyne, že těleso racionálních čísel úplné není.

Věta 1.11 (Jedinečnost $\mathbb{R}$)**.** *Těleso reálných čísel je jediné úplné uspořádané těleso.*

Definice 1.12. Absolutní hodnota reálného čísla $a \in \mathbb{R}$ je definována

$$|a| = \begin{cases} a & \text{pro } a \geq 0 \\ -a & \text{pro } a < 0. \end{cases}$$

Absolutní hodnota vyjadřuje vzdálenost daného reálného čísla od nuly. Obecně, pro dvě reálná čísla x a y odpovídá hodnota $|x - y|$ vzdálenosti mezi x a y na reálné ose. Reálná čísla s absolutní hodnotou jsou prvním příkladem *metrického prostoru*, který potkáváme.

Definice 1.13. *Metrický prostor* je dvojice (M, d), kde M je množina a $d : M \times M \to [0, \infty)$ je funkce splňující následující podmnínky. Pro každé $x, y \in M$ platí, že

(*i*) $d(x, y) = 0$ právě tehdy, když $x = y$,

(*ii*) $d(x, y) = d(y, x)$ a

(*iii*) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ pro každé $z \in M$.

Funkci d nazýváme *metrika na* M.

Funkce $d(x, y) = |x - y|$ (pro $x, y \in \mathbb{R}$) zřejmě splňuje první dvě podmínky. Poslední podmínka se nazývá *trojúhelníková nerovnost*. Z následující věty plyne, že funkce $|x - y|$ splňuje i třetí podmínku (dosazením $a = x - z$ a $b = z - y$).

Věta 1.14 (Trojúhelníková nerovnost)**.** *Pro každé* $a, b \in \mathbb{R}$ *platí, že* $|a + b| \leq |a| + |b|$.

Důkaz. Cvičení. □

Zobecněním této metriky je *Eukleidovská metrika ve vícerozměrném prostoru* $\mathbb{R}^d$. Vzdálenost mezi dvěma body $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{\mathbf{d}}$, kde $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ a $\mathbf{y} = (y_1, \ldots y_d)$ je definována jako

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} (x_i - y_i)^2}.$$

2 Posloupnosti a jejich limity

Nejprve ještě doplníme dvě užitečné nerovnosti.

Věta 2.1 (Bernoulliova nerovnost)**.** *Pro každé reálné číslo* $x \geq -1$ *a celé číslo* $n \geq 0$ *platí, že*

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Důkaz. Pro $n = 0, 1$ zjevně platí. Platí-li pro n, vynásobíme obě její strany nezáporným číslem $1 + x$ a dostaneme, že

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx) = 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x,$$

což je Bernoulliova nerovnost pro $n + 1$. □

Věta 2.2 (Nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem.)**.** *Pro všechna* $n \in \mathbb{N}$ *a nezáporná reálná čísla* $x_1, \ldots, x_n \in [0, \infty)$ *platí nerovnost*

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}.$$

Definice 2.3. Nechť M je množina. *Posloupnost s hodnotami v* M je zobrazení z $\mathbb{N}$ do M.

Každé přirozené číslo n je tedy zobrazeno na nějaký prvek a_n množiny M. Tomuto prvku říkáme *n-tý prvek posloupnosti.* Posloupnost $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ obvykle značíme $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, nebo jen (a_n). Zápis $(a_n) \subset M$ znamená, ze jde o posloupnost s hodnotami v M.

Pokud nebude uvedeno jinak, budeme se zabývat posloupnostmi reálných čísel. Některé poznatky také zobecníme pro posloupnosti s hodnotami v $\mathbb{R}^d$.

Definice 2.4. Posloupnost reálných čísel (a_n) je

- *shora omezená* pokud existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že $a_n < K$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,
- *zdola omezená* pokud existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že $a_n > K$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,
- *omezená* pokud je shora i zdola omezená,
- *rostoucí* pokud $a_n < a_m$ pro každé $n < m$,
- *neklesající* pokud $a_n \leq a_m$ pro každé $n < m$,
- *klesající* pokud $a_n > a_m$ pro každé $n < m$,
- *nerostoucí* pokud $a_n \geq a_m$ pro každé $n < m$,
- *monotónní* pokud je neklesající nebo nerostoucí.

Definice 2.5 (Vlastní limita)**.** Nechť (a_n) je posloupnost reálných čísel. Řekneme, že $A \in \mathbb{R}$ je *(vlastní) limita* posloupnost (a_n), pokud pro každé reálné číslo $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé přirozené číslo $n \geq n_0$ je $|a_n - A| < \varepsilon$. Pokud posloupnost má vlastní limitu, říkáme, že *konverguje*, případně, že je *konvergentní* a píšeme

$$\lim_{n \to \infty} a_n = A.$$

Definice 2.6 (Nevlastní limita)**.** Nechť (a_n) je posloupnost reálných čísel. Řekneme, (a_n) má *(nevlastní) limitu* ∞, píšeme $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, pokud pro každé reálné číslo K existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé přirozené číslo $n \geq n_0$ je $a_n > K$. Řekneme, (a_n) má *(nevlastní) limitu* $-\infty$, píšeme $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ pokud pro každé reálné číslo K existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé přirozené číslo $n \geq n_0$ je $a_n < K$.

Limitu lze definovat i pro posloupnosti s hodnotami v $\mathbb{R}^d$ a obecně v libovolném metrickém prostoru. Pro metrický prostor (M, d) řekneme, že $a \in M$ je limitou posloupnosti $(a_n) \subset M$ pokud vzdálenost posloupnosti od bodu a konverguje k nule. Tedy $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, pokud $\lim_{n\to\infty} d(a_n, a) = 0$.

Věta 2.7 (Jednoznačnost limity)**.** *Každá posloupnost reálných čísel* (a_n) *má nejvýše jednu limitu (vlastní či nevlastní).*

Důkaz. Pro spor budeme předpokládat, že (a_n) má dvě limity $K < L$. Vezmeme $\varepsilon > 0$ tak malé, že $\varepsilon < (L - K)/2$. Protože K i L je limita posloupnosti, existují čísla $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ taková, že $n > n_1 \Rightarrow |a_n - K| < \varepsilon$ a $n > n_2 \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$. Pak ale pro n větší než $\max(n_1, n_2)$ platí obě nerovnosti současně: $|a_n - K| < \varepsilon$ & $|a_n - L| < \varepsilon$. Pomocí trojúhelníkové nerovnosti odtud získáme spor:

$$L - K = |L - K| \leq |L - a_n| + |a_n - K| < 2\varepsilon < L - K.$$

□

Věta 2.8 (O limitě monotónní posloupnosti)**.** *Je-li posloupnost reálných čísel* (a_n) *neklesající a shora omezená, pak konverguje.*

Důkaz. Supremum

$$a = \sup(\{a_1, a_2, \ldots\})$$

je dobře definované díky omezenosti (a_n) shora. Podle definice suprema pro dané $\varepsilon > 0$ existuje n_0, že

$$a - \varepsilon < a_{n_0} \leq a \ ,$$

(jinak by $a - \varepsilon$ bylo horní závorou menší než supremum, což nelze). Díky monotonii (a_n) a vlastnosti suprema tyto nerovnosti platí i pro každé a_n s $n > n_0$. Ukázali jsme tedy, že $\lim a_n = a$. □

Totéž platí, je-li (a_n) nerostoucí a zdola omezená. Snadno se podobně dokáže, že je-li a_n neklesající a shora neomezená, je $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$. Je-li a_n nerostoucí a zdola neomezená, je $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$. Monotonii (a_n) stačí vždy předpokládat jen pro každé $n > n_0$.

Definice 2.9 (Podposloupnost)**.** Posloupnost (b_n) je *podposloupností* posloupnosti (a_n), když existuje takové rostoucí zobrazení $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, že $b_n = a_{f(n)}$. Jinými slovy, existuje rostoucí posloupnost přirozených čísel $k_1 < k_2 < \ldots$, že

$$b_n = a_{k_n}, \ n = 1, 2, \ldots \ .$$

Je jasné, že pak $k_n \geq n$ pro každé n. Relace „být podposloupností" je tranzitivní a reflexivní, ale ne antisymetrická.

Věta 2.10 (O limitě podposloupnosti)**.** *Je-li* (b_n) *podposloupnost* (a_n) *a* $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$*, pak i* $\lim_{n\to\infty} b_n = a$*.*

Důkaz. Cvičení. □

Nalezneme-li tedy v posloupnosti (a_n) dvě podposloupnosti s různými limitami, $\lim_{n\to\infty} a_n$ neexistuje.

Příklad 2.11. Konstantní posloupnosti $(1, 1, 1, \ldots)$ a $(-1, -1, -1, \ldots)$ s limitami 1 a -1 jsou podposloupnostmi v $(a_n) = ((-1)^n)$, takže $\lim_{n\to\infty} (-1)^n$ neexistuje.

Pro výpočty nevlastních limit zavedeme *rozšířenou reálnou osu* $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, která vznikne přidáním obou nekonečen k reálným číslům. Porovnávání a aritmetické operace na $\mathbb{R}^*$ definujeme následovně:

$$\begin{aligned}
&\forall a \in \mathbb{R}: \ -\infty < a < +\infty \ ;\\
&\forall a \in \mathbb{R}^*, a \neq -\infty: \ a + (+\infty) = (+\infty) + a = +\infty \ ;\\
&\forall a \in \mathbb{R}^*, a \neq +\infty: \ a + (-\infty) = (-\infty) + a = -\infty \ ;\\
&\forall a \in \mathbb{R}^*, a > 0: \ a(\pm\infty) = (\pm\infty)a = \pm\infty \ ;\\
&\forall a \in \mathbb{R}^*, a < 0: \ a(\pm\infty) = (\pm\infty)a = \mp\infty \ ;\\
&\forall a \in \mathbb{R}: \ \frac{a}{\pm\infty} = 0 \ .
\end{aligned}$$

Zbylé výrazy

$$(+\infty) + (-\infty),\ (-\infty) + (+\infty),\ 0 \cdot (\pm\infty),\ (\pm\infty) \cdot 0,\ \frac{\pm\infty}{\pm\infty},\ \frac{a}{0} \ \text{ pro } \ a \in \mathbb{R}^*$$

— součet dvou nekonečen s opačnými znaménky, součin nuly a nekonečna, podíl dvou nekonečen a každý podíl s nulou ve jmenovateli — ponecháváme nedefinované, jsou to tzv. *neurčité výrazy.*

Následující výsledek je základem pro výpočty konkrétních limit.

Věta 2.12 (Aritmetika limit)**.** *Nechť* $(a_n), (b_n)$ *jsou posloupnosti reálných čísel s* $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}^*$ *a* $\lim_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{R}^*$*. Pak*

(i) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$*, je-li výraz na pravé straně definován,*

(ii) $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab$*, je-li výraz na pravé straně definován,*

(iii) *pokud* $b_n \neq 0$ *pro každé* $n > n_0$*, pak* $\lim_{n\to\infty}(a_n/b_n) = a/b$*, je-li výraz na pravé straně definován.*

Důležité je, že aritmetika limit funguje jen jednosměrně. Není obecně pravda, že když $(a_n + b_n)$ konverguje k a, pak konvergují i (a_n) a (b_n) a $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = a$ (například posloupnosti $a_n = (-1)^n$ a $b_n = -(-1)^n$ nekonvergují, ale jejich součet ano). Totéž platí pro součin a podíl.

V jednom případě limity součinu postačují slabší předpoklady — limita jedné z posloupností nemusí existovat:

Věta 2.13 (Násobení limitní nulou)**.** *Nechť (a_n) je omezená a (b_n) konverguje k 0. Pak $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = 0$.*

Důkaz. Cvičení. $\square$

Věta 2.14 (O limitě a uspořádání))**.** *Nechť posloupnosti $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{R}$ mají vlastní limity $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ a $\lim_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$.*

(i) *Když $a < b$, tak existuje n_0, že $n > n_0 \Rightarrow a_n < b_n$.*

(ii) *Když $a_n \leq b_n$ pro každé $n > n_0$, pak $a \leq b$.*

Toto tvrzení platí beze změny i pro nevlastní limity (kde bereme $-\infty < a < +\infty$ pro každé $a \in \mathbb{R}$). Je třeba nezapomínat, že ostrá nerovnost může v limitě přejít v rovnost: $a_n = 1 - 1/n < b_n = 1$ pro každé n, ale $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 1$.

3 Posloupnosti - pokračování

Minule jsme skončili formulací následující věty:

Věta (O limitě a uspořádání)**.** *Nechť posloupnosti* $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{R}$ *mají vlastní limity* $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ *a* $\lim_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$.

(i) *Když* $a < b$*, tak existuje* n_0*, že* $n > n_0 \Rightarrow a_n < b_n$.

(ii) *Když* $a_n \leq b_n$ *pro každé* $n > n_0$*, pak* $a \leq b$.

Důkaz. (Ponechán jako samostatné cvičení.)

(*i*) Pro ε, $0 < \varepsilon < (b-a)/2$, existuje n_0, že pro $n > n_0$ je $a_n < a + \varepsilon < (a+b)/2 < b - \varepsilon < b_n$, takže $a_n < b_n$.

(*ii*) Kdyby bylo $a > b$, pro velké n by podle (i) platilo $a_n > b_n$, což je ve sporu s předpokladem.

□

Toto tvrzení platí beze změny i pro nevlastní limity (kde bereme $-\infty < a < +\infty$ pro každé $a \in \mathbb{R}$). Je třeba nezapomínat, že ostrá nerovnost může v limitě přejít v rovnost: $a_n = 1 - 1/n < b_n = 1$ pro každé n, ale $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 1$.

Věta 3.1 (O dvou policajtech)**.** *Nechť posloupnosti* $(a_n), (b_n), (c_n) \subset \mathbb{R}$ *splňují, že* $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = a \in \mathbb{R}$ *a pro každé* $n > n_0$ *je* $a_n \leq c_n \leq b_n$*. Pak* (c_n) *konverguje a* $\lim_{n\to\infty} c_n = a$.

Z (ii) předchozí věty plyne, že pokud (c_n) má limitu, pak je rovna a. Potřebujeme ale dokázat, že limita (c_n) existuje.

Důkaz. Z definice limity pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje n_a takové, že $a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ pro každé $n \geq n_a$. Podobně existuje n_b takové, že $b_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ pro každé $n \geq n_b$. Vezmeme-li tedy $n_0 = \max(n_a, n_b)$, v kombinaci s předpokladem věty máme, že pro každé $n \geq n_0$ platí $a - \varepsilon < a_n < c_n < b_n < a + \varepsilon$, tedy $c_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$.

□

I toto tvrzení se snadno rozšíří na nevlastní limity: pro $a = +\infty$ stačí pouze jeden policajt a_n a pro $a = -\infty$ stačí pouze policajt b_n.

Definice 3.2 (Hromadný bod.)**.** Nechť (a_n) je posloupnost reálných čísel. Rozšířené reálné číslo $\alpha \in \mathbb{R}^*$ je jejím *hromadným bodem*, pokud je limitou nějaké podposloupnosti (a_n).

Z Věty 2.10 plyne, že pokud má posloupnost (a_n) limitu a, a je jediným hromadným bodem (a_n). Nyní dokážeme, že každá posloupnost má jeden nebo více hromadných bodů.

Věta 3.3 (O monotónní podposloupnosti)**.** *Každá posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$ má monotónní podposloupnost.*

Důkaz. Nechť $(a_n) \subset \mathbb{R}$ je libovolná posloupnost. Řekneme, že v indexu $k \in \mathbb{N}$ začíná *dobrá posloupnost*, existují-li takové indexy $k = k_1 < k_2 < \ldots$, že $a_{k_1} \leq a_{k_2} \leq \ldots$, a že v k začíná *špatná posloupnost*, existují-li takové indexy $k = k_1 < k_2 < \ldots < k_j$, že $a_{k_1} \leq a_{k_2} \leq \ldots \leq a_{k_j} > a_n$ pro každé $n > k_j$. V prvním případě tedy členem a_k začíná nekonečná neklesající podposloupnost, a ve druhém taková konečná neklesající podposloupnost, že už ji nelze prodloužit. Zřejmě v každém indexu $k \in \mathbb{N}$ začíná dobrá posloupnost nebo v něm začíná špatná posloupnost. (Vystartujeme z k a libovolně budujeme neklesající podposloupnost. Když se nikdy nezastavíme, máme dobrou posloupnost, a když nastane krok, kdy už nemůžeme nijak pokračovat, máme špatnou posloupnost.)

Pokud v indexu 1 začíná dobrá posloupnost, jsme hotovi. Když ne, začíná v 1 špatná posloupnost a jako $k_1 > 0$ definujeme její poslední index. Pokud v indexu $k_1 + 1$ začíná dobrá posloupnost, jsme hotovi. Když ne, začíná v $k_1 + 1$ špatná posloupnost a jako $k_2 > k_1$ definujeme její poslední index. Takto pokračujeme dále. Pokud někdy dostaneme dobrou posloupnost, jsme hotovi, protože (a_n) má neklesající podposloupnost. Pokud ji nikdy nedostaneme a máme stále špatné posloupnosti, vezmeme jejich poslední indexy $1 \leq k_1 < k_2 < \ldots$. Podle definice špatné posloupnosti tvoří klesající podposloupnost $a_{k_1} > a_{k_2} > \ldots$ a jsme zase hotovi. □

Věta 3.4 (Bolzanova–Weierstrassova)**.** *Každá omezená posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$ má konvergentní podposloupnost.*

Důkaz. Nechť $(a_n) \subset \mathbb{R}$ je omezená. Podle předchozí věty má (a_n) monotónní podposloupnost (b_n), jež je zjevně omezená. Podle Věty 2.8 je (b_n) konvergentní. □

Podle Věty 3.4 má každá omezená posloupnost hromadný bod. Pro neomezenou posloupnost je hromadným bodem ∞ nebo $-\infty$.

Označíme

$$\mathbb{R}^* \supset H = \{\text{hromadné body posloupnosti } (a_n)\} \,.$$

Nahlédneme, že H má největší i nejmenší prvek. Když (a_n) není shora omezená, pak je $+\infty \in H$ největším prvkem. Je-li (a_n) shora omezená číslem $c \in \mathbb{R}$, je c zřejmě i horní závorou pro H. Nechť $\alpha = \sup(H) \in \mathbb{R}$. Podle vlastnosti suprema a definice množiny H pro každé $k \in \mathbb{N}$ má (a_n) podposloupnost s limitou v intervalu $[\alpha - 1/k, \alpha]$. Z těchto podposloupností pro $k = 1, 2, \ldots$ vybereme vhodné členy $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots$, že $n_1 < n_2 < \ldots$ a pro každé k je $a_{n_k} \in [\alpha - 2/k, \alpha]$.

Tím jsme vyrobili podposloupnost, jejíž limita je α. Tedy $\alpha = \sup(H) \in H$ a H má největší prvek. Podobně se ukáže, že H má nejmenší prvek.

Definice 3.5 (Limes superior a limes inferior.)**.** Definujeme

$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \min(H) \quad \text{a} \quad \limsup_{n\to\infty} a_n := \max(H) \,.$$

Tyto zkratky znamenají *limes inferior*, nejmenší limita (podposloupnosti), a *limes superior*, největší limita (podposloupnosti). Na rozdíl od limity $\liminf$ a $\limsup$ vždy existují.

Řady reálných čísel

Definice 3.6 (Řada a její součet)**.** *Nekonečná řada (reálných čísel)* je výraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots \,,$$

kde $(a_n)_{n\geq 1}$ je posloupnost reálných čísel. Budeme se snažit přidržovat tohoto značení, ale pochopitelně se používá mnoho variant zápisů nekonečných řad, pro sčítací index se například může použít jiné písmeno, sčítá se od jiné hodnoty než od 1, apod.; zápisy pro nekonečné řady jsou tedy třeba také

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = b_0 + b_1 + \cdots \,, \ \sum_{i=m}^{\infty} a_i = a_m + a_{m+1} + \cdots \,, \sum_{k\geq 8} c_k = c_8 + c_9 + \cdots \,.$$

Částečný součet řady, přesněji její n-tý částečný součet s_n, je součet jejích prvních n členů. Pro řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je tedy $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ a pro řadu $\sum_{k\geq 8} c_k$ je $s_n = c_8 + c_9 + \cdots + c_{n+7}$.

Pokud existuje vlastní limita posloupnosti (s_n) částečných součtů dané řady, mluvíme o *konvergentní řadě* a limita $\lim_{n\to\infty} s_n$ je jejím *součtem*. Pokud $\lim s_n$ neexistuje nebo je nevlastní, je daná řada *divergentní*.

Příklad 3.7. Řada $\sum_{n\geq 0}(-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ je divergentní, protože $(s_n) = (1, 0, 1, 0, 1, \dots)$.

Příklad 3.8. Důležitým příkladem řady je *geometrická řada*

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots \,,$$

kde $q \in \mathbb{R}$ je parametr zvaný *kvocient*. Pro součet geometrické řady platí, že

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \dots \quad -1 < q < 1 \\ +\infty & \dots \quad q \geq 1 \\ \text{neexistuje} & \dots \quad q \leq -1. \end{cases}$$

To vyplývá to ze vzorce pro částečný součet ($q \neq 1$):

$$s_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Pro $|q| < 1$ je $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ a podle aritmetiky limit $\lim_{n\to\infty} s_n = (0 - 1)/(q-1) = 1/(1-q)$. Pro $q > 1$ jako limita vyjde $(+\infty - 1)/(q-1) = +\infty$ a pro $q = 1$ také (tehdy $s_n = n$). Pro $q \leq -1$ limita $\lim_{n\to\infty} q^n$ neexistuje a neexistuje tedy ani limita $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}(q^n - 1)/(q-1)$.

Příklad 3.9. Dalším častým příkladem jsou řady typu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots,$$

kde $s \in \mathbb{R}$. Pro jejich konvergenci platí, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \begin{cases} \text{konverguje pro } s > 1 \\ \text{diverguje pro } s \leq 1. \end{cases}$$

Pro $s = 1$ se tato řada nazývá *harmonická řada*. Je to důležitý příklad řady, která diverguje, ačkoli její prvky konvergují k nule.

Pro některé hodnoty s jsou pro součty této řady známy explicitní vzorce, například

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{a} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$