Kombinatorika a grafy 3 (cvičení 8.3.2019)

https://kam.mff.cuni.cz/∼tereza/kg1-18.html

1. Definujme čísla a_n a b_n takto:

   - a_n je počet způsobů, jak zapsat číslo n jako součet tří nezáporných celých čísel,
   - b_n je počet způsobů, jak zapsat číslo n jako součet tří kladných celých čísel.

   Součty, které se liší pořadím sčítanců považujeme za různé. Najděte nejprve vytvořující funkce, pak vzorce pro čísla a_n a b_n.

2. Chcete koupit 50 kusů ovoce šesti druhů, od každého druhu alespoň 7 kusů. Pomocí vytvořujících funkcí spočtěte, kolika způsoby to lze udělat.

3. Chcete koupit n kusů ovoce (jablek, hrušek, pomerančů a banánů) tak, aby počet jablek byl sudý, počet banánů dělitelný pěti, pomeranče nejvýše čtyři a hruška nejvýše jedna. Najděte vytvořující funkci a vyjádření n-tého členu.

4. Vyřešte rekurenci $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$, $n \geq 2$, $a_0 = 1$, $a_1 = -2$.

5. Pomocí vytvořujících funkcí odvoďte vzorec pro

   - $\sum_{k=0}^{n} 2^k$
   - $\sum_{k=0}^{n} k^2$

Domácí úkoly

Úkol 3 *(4 body, 22.3. 10:40)* Chcete koupit n kusů ovoce (jablek, hrušek, pomerančů a banánů) tak, aby počet jablek byl sudý, počet banánů lichý, pomeranče nejvýše čtyři a hrušky alespoň dvě. Najděte vytvořující funkci.

Úkol 4 *(4 body, 22.3. 10:40)* Pomocí vytvořujících funkcí odvoďte vzorec pro $\sum_{k=0}^{n} k2^k$.

Úkol 5 *(4 body, 22.3. 10:40)* Najděte koeficient u x^{52} v

$$(x^{10} + x^{11} + \cdots + x^{25})(x + x^2 + \cdots + x^{15})(x^{20} + x^{21} + \cdots + x^{45}).$$