Cvičení z Diskrétní matematiky

1. cvičení

4. 10. 2018

1. Na vodorovné tyči dlouhé 1 metr je 25 mravenců. V čase 0 se každý mravenec začne pohybovat rychlostí 1 cm/s podél tyče, a to v jednom ze dvou možných směrů (vlevo nebo vpravo). Pokud dojde na okraj tyče, spadne dolů. Pokud se dva mravenci potkají, nemohou se vyhnout; místo toho se oba otočí čelem vzad a pokračují v pohybu opačným směrem. Za jak dlouho všichni spadnou z tyče? Jak musí být mravenci na počátku rozestavěni, aby tohoto času dosáhli?

2. Dokažte, že pomocí tříkorunových a pětikorunových mincí lze zaplatit každou celočíselnou částku větší než 7 Kč.

3. Dokažte, že každé kladné celé číslo je součinem prvočísel.

4. **Tvrzení:** Všichni koně mají stejnou barvu.
   Důkaz: Indukcí dle počtu koní. Pro jednoho koně platí. Předpokládejme, že tvrzení platí pro všechny skupiny N koní a chceme ho dokázat pro $N+1$ koní. Mějme skupinu $N+1$ koní. Pokud je v ní kůň jiné barvy, vypustíme z ní libovolného jiného koně. Z indukce mají všichni koně v této skupině stejnou barvu, což je spor s tím, že některý z $N+1$ koní měl jinou barvu. $\square$

   Kde je problém?

5. Dokažte, že počet posloupností nul a jedniček, které neobsahují dvě nuly vedle sebe, je F_{n+2}.

6. Ukažte, že prvočísel je nekonečně mnoho.

7. Dokažte indukcí následující vzorečky (pro $n \in \mathbb{Z}^+$):

$$\sum_{i=1}^{n}(4i+5) = 2n^2 + 7n,$$

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2,$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1},$$

$$\sum_{i=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$$

$$\prod_{i=2}^{n}\frac{i-1}{i} = \frac{1}{n}.$$

8. Dokažte (indukcí), že $6n^2 + 2n$ je dělitelné 4.

9. Indukcí dokažte, že každý pravidelný $3n-$úhelník se dá rozdělit neprotínajícími se úhlopříčkami na trojúhelníky tak, že v každém vrcholu je sudý počet hran.

Cvičení z Diskrétní matematiky

1. cvičení

4. 10. 2018

1. Na vodorovné tyči dlouhé 1 metr je 25 mravenců. V čase 0 se každý mravenec začne pohybovat rychlostí 1 cm/s podél tyče, a to v jednom ze dvou možných směrů (vlevo nebo vpravo). Pokud dojde na okraj tyče, spadne dolů. Pokud se dva mravenci potkají, nemohou se vyhnout; místo toho se oba otočí čelem vzad a pokračují v pohybu opačným směrem. Za jak dlouho všichni spadnou z tyče? Jak musí být mravenci na počátku rozestavěni, aby tohoto času dosáhli?

2. Dokažte, že pomocí tříkorunových a pětikorunových mincí lze zaplatit každou celočíselnou částku větší než 7 Kč.

3. Dokažte, že každé kladné celé číslo je součinem prvočísel.

4. **Tvrzení:** Všichni koně mají stejnou barvu.
   Důkaz: Indukcí dle počtu koní. Pro jednoho koně platí. Předpokládejme, že tvrzení platí pro všechny skupiny N koní a chceme ho dokázat pro $N+1$ koní. Mějme skupinu $N+1$ koní. Pokud je v ní kůň jiné barvy, vypustíme z ní libovolného jiného koně. Z indukce mají všichni koně v této skupině stejnou barvu, což je spor s tím, že některý z $N+1$ koní měl jinou barvu. $\square$

   Kde je problém?

5. Dokažte, že počet posloupností nul a jedniček, které neobsahují dvě nuly vedle sebe, je F_{n+2}.

6. Ukažte, že prvočísel je nekonečně mnoho.

7. Dokažte indukcí následující vzorečky (pro $n \in \mathbb{Z}^+$):

$$\sum_{i=1}^{n}(4i+5) = 2n^2 + 7n,$$

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2,$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1},$$

$$\sum_{i=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$$

$$\prod_{i=2}^{n}\frac{i-1}{i} = \frac{1}{n}.$$

8. Dokažte (indukcí), že $6n^2 + 2n$ je dělitelné 4.

9. Indukcí dokažte, že každý pravidelný $3n-$úhelník se dá rozdělit neprotínajícími se úhlopříčkami na trojúhelníky tak, že v každém vrcholu je sudý počet hran.