

Cvičení z Diskrétní matematiky

3. cvičení - Kombinatorické počítání

18. 10. 2018

1. Matematickou indukcí dokažte, že pro konečné množiny X a Y platí:

- Existuje-li prosté zobrazení z X do množiny Y , potom $|X| \leq |Y|$.
- Existuje-li zobrazení množiny X na Y , potom $|X| \geq |Y|$.

2. Necht' $f: X \rightarrow Y$ a $g: Y \rightarrow X$ jsou funkce takové, že pro každé $x \in X$ platí $(g \circ f)(x) = x$ a pro každé $y \in Y$ platí, že $(f \circ g)(y) = y$. Dokažte, že f i g jsou bijekce (tedy prosté a na).

3. Rozmísťujeme k kuliček do n přihrádek. Do následující tabulky doplňte počty možných výběrů:

Kuličky jsou	V každé přihrádce je		
	nejvýše jedna	libovolně mnoho	alespoň jedna
různobarevné			
stejnobarevné			

4. Kolika způsoby lze rozestavit černého a bílého krále na šachovnici tak, aby se navzájem neohrožovali? (t.j. nestáli na sousedních políčkách)?

5. Určete počet uspořádaných dvojic (A, B) , kde $A \subseteq B \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$. uspořádaných čtveřic (A, B, C, D) , kde $A \subseteq B \subseteq D \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ a také $A \subseteq C \subseteq D$.

6. Kolika způsoby lze dojít na Manhattanu z rohu 5. avenue a 15. street na roh 10. avenue a 23. street, pokud půjdeme pouze severozápadním nebo severovýchodním směrem? (v této oblasti ulice tvoří pravidelnou mřížku bez zkratk a bez slepých nebo přerušených ulic.)

7. Kolik existuje různých správných uspořádání n párů závorek tak, že závorky lze správně spárovat (dobré uzávorkování)?

8. Profesor Plešohlav zjistil, že stejné konference se účastní 5 jeho přátel. Z těchto pěti lidí potkal během přednášek:

- každého jednotlivce $10\times$,
- každou dvojici $5\times$,
- každou trojici $3\times$,
- každou čtveřici $2\times$,
- celou pětici $1\times$.

Kolik přednášek měla konference, pokud profesor potkal na každé přednášce někoho ze svých přátel?

9. Kolika způsoby lze postavit do řady 5 vodníků a 7 čarodějnic, že žádní 2 vodníci nestojí vedle sebe? Kolik je možností, kdybychom je za stejných podmínek měli stavět do kruhu? A co když do kruhu budeme stavět opět 5 vodníků, ale 10 čarodějnic? A co když máme mít v kruhu 6 vodníků a 12 čarodějnic?

Cvičení z Diskrétní matematiky

3. cvičení - Kombinatorické počítání

18. 10. 2018

1. Matematickou indukcí dokažte, že pro konečné množiny X a Y platí:

- Existuje-li prosté zobrazení z X do množiny Y , potom $|X| \leq |Y|$.
- Existuje-li zobrazení množiny X na Y , potom $|X| \geq |Y|$.

2. Necht' $f: X \rightarrow Y$ a $g: Y \rightarrow X$ jsou funkce takové, že pro každé $x \in X$ platí $(g \circ f)(x) = x$ a pro každé $y \in Y$ platí, že $(f \circ g)(y) = y$. Dokažte, že f i g jsou bijekce (tedy prosté a na).

3. Rozmísťujeme k kuliček do n přihrádek. Do následující tabulky doplňte počty možných výběrů:

Kuličky jsou	V každé přihrádce je		
	nejvýše jedna	libovolně mnoho	alespoň jedna
různobarevné			
stejnobarevné			

4. Kolika způsoby lze rozestavit černého a bílého krále na šachovnici tak, aby se navzájem neohrožovali? (t.j. nestáli na sousedních políčkách)?

5. Určete počet uspořádaných dvojic (A, B) , kde $A \subseteq B \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$. uspořádaných čtveřic (A, B, C, D) , kde $A \subseteq B \subseteq D \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ a také $A \subseteq C \subseteq D$.

6. Kolika způsoby lze dojít na Manhattanu z rohu 5. avenue a 15. street na roh 10. avenue a 23. street, pokud půjdeme pouze severozápadním nebo severovýchodním směrem? (v této oblasti ulice tvoří pravidelnou mřížku bez zkratk a bez slepých nebo přerušených ulic.)

7. Kolik existuje různých správných uspořádání n párů závorek tak, že závorky lze správně spárovat (dobré uzávorkování)?

8. Profesor Plešohlav zjistil, že stejné konference se účastní 5 jeho přátel. Z těchto pěti lidí potkal během přednášek:

- každého jednotlivce $10\times$,
- každou dvojici $5\times$,
- každou trojici $3\times$,
- každou čtveřici $2\times$,
- celou pětici $1\times$.

Kolik přednášek měla konference, pokud profesor potkal na každé přednášce někoho ze svých přátel?

9. Kolika způsoby lze postavit do řady 5 vodníků a 7 čarodějnic, že žádní 2 vodníci nestojí vedle sebe? Kolik je možností, kdybychom je za stejných podmínek měli stavět do kruhu? A co když do kruhu budeme stavět opět 5 vodníků, ale 10 čarodějnic? A co když máme mít v kruhu 6 vodníků a 12 čarodějnic?