Příklady na procvičení

z

Lineární algebry 2
(LS 2020/2021)

8. března 2021

zpracovali:

Martin Černý, Pavel Dvořák, Elif Garajová,
Milan Hladík, Veronika Slívová

Obsah

1. Skalární součin, norma

Cv. 1.1 Rozhodněte, zda následující zobrazení představují skalární součin na prostoru $\mathbb{R}^2$:

(a) $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2$,
(b) $\langle x, y\rangle = -x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 4x_2y_2$,
(c) $\langle x, y\rangle = x_1y_2 + x_2y_1 + 4x_2y_2$,
(d) $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 5x_2y_2$.

Řešení:

(a) Ne, protože není splněna symetrie. Například pro $x = (1, 0)^T$, $y = (0, 1)^T$ je
$$\langle x, y\rangle = 2 \neq -2 = \langle y, x\rangle,$$

(b) Ne, protože není splněna první vlastnost z definice skalárního součinu. Například pro $x = (1, 0)^T$ je $\langle x, x\rangle = -1$, což není kladná hodnota.

(c) Ne, protože není splněna první vlastnost z definice skalárního součinu. Například pro $x = (1, 0)^T$ je $\langle x, x\rangle = 0$ což není kladná hodnota.

(d) Ano. Musíme ověřit vlastnosti skalárního součinu:

- První vlastnost z definice. Upravme
$$\begin{aligned}\langle x, x\rangle &= x_1x_1 + 2x_1x_2 + 2x_2x_1 + 5x_2x_2\\ &= x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 = (x_1 + 2x_2)^2 + x_2^2 \geq 0.\end{aligned}$$
Hodnota je nulová pouze tehdy, když jsou oba sčítance nulové, tedy když
$$x_1 + 2x_2 = 0 \ \text{ a zároveň } \ x_2 = 0.$$
To nastane pouze pro $x = (0, 0)^T$, čímž je první vlastnost dokázána.
- Vlastnost se součtem $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$ platí, protože
$$\begin{aligned}\langle x + y, z\rangle &= (x_1 + y_1)z_1 + 2(x_1 + y_1)z_2 + 2(x_2 + y_2)z_1 + 5(x_2 + y_2)z_2,\\ \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle &= (x_1z_1 + 2x_1z_2 + 2x_2z_1 + 5x_2z_2)\\ &\quad + (y_1z_1 + 2y_1z_2 + 2y_2z_1 + 5y_2z_2),\end{aligned}$$
- Vlastnost s násobky $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle y, x\rangle$ platí, protože
$$\begin{aligned}\langle \alpha x, y\rangle &= \alpha x_1y_1 + 2\alpha x_1y_2 + 2\alpha x_2y_1 + 5\alpha x_2y_2,\\ \alpha\langle x, y\rangle &= \alpha(x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 5x_2y_2).\end{aligned}$$
- Symetrie: $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ platí, protože
$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle &= x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 5x_2y_2,\\ \langle y, x\rangle &= y_1x_1 + 2y_1x_2 + 2y_2x_1 + 5y_2x_2.\end{aligned}$$

Cv. 1.2 Pythagorova věta.

(a) Nad $\mathbb{R}$ dokažte: $x \perp y$ právě tehdy když $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

(b) Najděte protipříklad nad $\mathbb{C}$, kdy předchozí ekvivalence neplatí, tj. x, y nejsou kolmé a přesto $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Řešení:

(a) Upravíme výraz

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle = \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle.\end{aligned}$$

Tudíž rovnost $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ nastane právě tehdy, když $2\langle x, y\rangle = 0$, neboli když $x \perp y$.

(b) Protipříklad nad $\mathbb{C}$: Uvažujme například vektory $x = (1, 0)^T$, $y = (i, 0)^T$. Nejsou na sebe kolmé, ale

$$\|x+y\|^2 = 2 = 1 + 1 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Cv. 1.3 Připomeňme, že stopa matice je definována jako součet prvků na diagonále:

$$\operatorname{trace}(A) \coloneqq \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

(a) Ukažte, že $\langle A, B\rangle = \operatorname{trace}(A^T B)$ definuje skalární součin na prostoru $\mathbb{R}^{m\times n}$.

(b) Zformulujete Cauchyho–Schwarzovu nerovnost.

(c) Dokažte $\operatorname{trace}(A)^2 \leq n \cdot \operatorname{trace}(A^T A)$.

Řešení:

(a) Pišme

$$\operatorname{trace}(A^T B) = \sum_{i=1}^{n} (A^T B)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (A^T)_{ij} B_{ji}. = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} A_{ji} B_{ji}.$$

Čili výraz $\operatorname{trace}(A^T B)$ představuje standardní skalární součin, pokud matici A asociujeme s dlouhým vektorem, složeným z jejích prvků

$$(a_{11}, \ldots, a_{m1}, a_{22}, \ldots, a_{m2}, \ldots, a_{1n}, \ldots, a_{mn}).$$

(b) Cauchyho–Schwarzova nerovnost $|\langle A, B\rangle|^2 \leq \|A\|^2 \cdot \|B\|^2$ dostane podobu

$$\operatorname{trace}(A^T B)^2 \leq \operatorname{trace}(A^T A) \operatorname{trace}(B^T B).$$

(c) Do Cauchyho–Schwarzovy nerovnosti dosadíme $A \coloneqq I_n$, $B \coloneqq A$ a tím pádem dostaneme

$$\operatorname{trace}(A)^2 \leq \operatorname{trace}(I_n) \cdot \operatorname{trace}(A^T A) = n \cdot \operatorname{trace}(A^T A).$$

Cv. 1.4 Dokažte, že pro každé $a_1, \ldots, a_n > 0$ platí:

$$n^2 \leq (a_1 + \ldots + a_n)(a_1^{-1} + \ldots + a_n^{-1}).$$

Řešení:
Aplikujeme Cauchyho–Schwarzovu nerovnost. Ta má tvar

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Konkrétně pro prostor $\mathbb{R}^n$ a standardní skalární součin je tvaru

$$|\textstyle\sum_{i=1}^n x_i y_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}.$$

Umocněním obou stran nerovnosti dostaneme

$$\left|\textstyle\sum_{i=1}^n x_i y_i\right|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right).$$

Nyní stačí vhodně dosadit za vektory x, y. Konkrétně zvolíme

$$x = (\sqrt{a_1}, \ldots, \sqrt{a_n})^T, \quad y = (1/\sqrt{a_1}, \ldots, 1/\sqrt{a_n})^T.$$

Tím dostane Cauchyho–Schwarzova nerovnost podobu

$$\left|\textstyle\sum_{i=1}^n 1\right|^2 \leq (a_1 + \ldots + a_n)(a_1^{-1} + \ldots + a_n^{-1}),$$

což po úpravě dá požadovaný tvar.

Cv. 1.5 Ověřte, že $\|x\| = |x_1 - 2x_2| + |3x_1 - 4x_2| + |5x_1 - 6x_2|$ je normou na prostoru $\mathbb{R}^2$.

Řešení:
Musíme ověřit vlastnosti z definice normy:

- Hodnota $\|x\|$ je zřejmě vždy nezáporná. Nulová je pouze, když všechny sčítance jsou nulové, tedy když

  $$x_1 - 2x_2 = 3x_1 - 4x_2 = 5x_1 - 6x_2 = 0.$$

  Tato situace nastane jen pro $x_1 = x_2 = 0$.
- Vlastnost $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ zjevně platí pro všechna $x \in \mathbb{R}^2$ a $\alpha \in \mathbb{R}$.
- Trojúhelníková nerovnost:

$$\begin{aligned}\|x + y\| &= |x_1 + y_1 - 2(x_2 + y_2)| + |3(x_1 + y_1) - 4(x_2 + y_2)| + \\ &\quad + |5(x_1 + y_1) - 6(x_2 + y_2)| \\ &\leq |x_1 - 2x_2| + |y_1 - 2y_2| + |3x_1 - 4x_2| + \\ &\quad + |3y_1 - 4y_2| + |5x_1 - 6x_2| + |5y_1 - 6y_2| = \|x\| + \|y\|.\end{aligned}$$

Cv. 1.6 Buď $\|\cdot\|$ libovolná reálná norma na prostoru $\mathbb{R}^n$ a buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulární matice. Dokažte, že $\|x\|_A := \|Ax\|$ je také norma.

Řešení:
Ověříme vlastnosti z definice normy:

- Hodnota $\|x\|_A$ je zřejmě vždy nezáporná. Nulová je pouze, když $Ax = o$. Díky regularitě matice A to nastane pouze pro $x = o$,
- $\|\alpha x\|_A = \|A\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|Ax\| = |\alpha| \cdot \|x\|_A$,
- Trojúhelníková nerovnost:

$$\|x + y\|_A = \|A(x + y)\| = \|Ax + Ay\| \leq \|Ax\| + \|Ay\| = \|x\|_A + \|y\|_A.$$

Cv. 1.7 Dokažte ekvivalenci norem

$$\|x\|_1 = \textstyle\sum_{i=1}^n |x_i|,$$
$$\|x\|_2 = \sqrt{\textstyle\sum_{i=1}^n x_i^2},$$
$$\|x\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$$

na prostoru $\mathbb{R}^n$. Konkrétně ukažte, že platí následující vztahy:

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty,$$
$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty,$$
$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2.$$

Řešení:
Pro ilustraci ukážeme první dvě nerovnosti, další vztahy se dokáží analogicky. Nerovnost $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1$ plyne díky

$$\|x\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i| \leq \textstyle\sum_{i=1}^n |x_i| = \|x\|_1.$$

Nerovnost $\|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$ plyne díky

$$\|x\|_1 = \sum_{j=1}^n |x_j| \leq \sum_{j=1}^n \max_{i=1,\dots,n} |x_i| = \sum_{j=1}^n \|x\|_\infty = n\|x\|_\infty.$$

Cv. 1.8 Nechť máme vektory $u_1 \dots u_n, v_1, \dots v_k \in \mathbb{R}^m$ a matice A resp. B, které vypadají následovně:

$$A = \begin{pmatrix} — & u_1 & — \\ — & u_2 & — \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ — & u_n & — \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} | & | & \dots & | \\ v_1 & v_2 & \dots & v_k \\ | & | & \dots & | \end{pmatrix}.$$

Jaký vztah má maticové násobení AB a skalarní součiny jednotlivých vekotrů u_i, v_j, kde $i \in [n]$ a $j \in [k]$.

Řešení:
$(AB)_{i,j} = \sum_{\ell=1}^m A_{i\ell}B_{\ell j} = \sum_{\ell=1}^m (u_i)_\ell (v_j)_\ell = \langle u_i, v_j \rangle.$

2. Ortonormální systém a Gramova–Schmidtova ortogonalizace

Cv. 2.1 Určete koeficienty lineární kombinace vektoru $(3,2,1)^T$ vůči ortonormální bázi $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)^T$, $(0,0,1)^T$.

Určete matice přechodu ${}_K[id]_B$ a ${}_B[id]_K$.

Řešení:
Standardně bychom mohli určit koeficienty lineární kombinace pomocí řešení soustavy

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 3 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Protože se jedná o ortonormální bázi, můžeme využít toho, že lze koeficienty vyjádřit speciálním způsobem jako $x = \sum_{i=1}^n \langle x, u_i\rangle u_i$ (tzv. *Fourierovy* koeficienty).

Tedy dostáváme $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i$, kde u_1, u_2, u_3 je zadaná ortonormální báze a

- $\alpha_1 = \langle (3,2,1)^T, \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T\rangle = \frac{5}{\sqrt{2}}$,
- $\alpha_2 = \langle (3,2,1)^T, \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)^T\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}$,
- $\alpha_3 = \langle (3,2,1)^T, (0,0,1)^T\rangle = 1$.

Matice

$${}_K[id]_B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matice přechodu ${}_B[id]_K = ({}_K[id]_B)^{-1}$. Uvědomíme si, že $(AB)_{i,j} = \langle A_{i*}, A_{*j}\rangle$. A tedy $({}_K[id]_B)^{-1} = ({}_K[id]_B)^T$ z ortonormality vektorů báze.

Dostáváme

$${}_B[id]_K = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cv. 2.2 V prostoru $\mathbb{R}^4$ se standardním skalárním součinem $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^4 x_i y_i$ nalezněte pomocí Gramovy–Schmidtovy ortogonalizace ortonormální bázi $Z = \{z_1, \ldots, z_r\}$ řádkového prostoru následující matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Řešení:
Základní myšlenka postupu je: Odečtením projekce x_i do $\operatorname{span}\{z_1, \ldots, z_{i-1}\}$ od x_i

spočteme nejprve kolmý vektor $y_i = x_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle x_i, z_j \rangle z_j$ a ten pak normalizujeme na $z_i = \frac{y_i}{\|y_i\|}$.

Jednotlivé kroky Gramovy–Schmidtovy ortogonalizace jsou:

- Normalizujeme $y_1 = x_1$: $\|y_1\| = \sqrt{4} = 2$ a odtud $z_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T$.
- $\langle x_2, z_1 \rangle = 5$ a proto $y_2 = (4, 1, 4, 1)^T - 5(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T = (\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2})^T$.
- Normalizujeme y_2: $\|y_2\| = 3$ a dostaneme $z_2 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})^T$.
- $\langle x_3, z_1 \rangle = 5$, $\langle x_3, z_2 \rangle = -1$ a tedy $y_3 = (-1, -1, 1, 1)^T$.
- Normalizujeme y_3: $\|y_3\| = 2$ a máme $z_3 = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T$.

Řešením je $Z = \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T, (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})^T, (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T\}$.

Cv. 2.3 Rozšiřte ortonormální bázi z předchozího příkladu na ortonormální bázi $\mathbb{R}^4$.

Řešení:
Nejprve rozšíříme bázi řádkového prostoru matice A na bázi $\mathbb{R}^4$. Matici převedeme do odstupňovaného tvaru a poté bázi Z rozšíříme např. o vektory z kanonické báze odpovídající všem nebázickým sloupcům. Odstupňovaný tvar matice A je

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nebázický je pouze poslední sloupec, a tak lze vzít např. $x_4 = (0, 0, 0, 1)^T$ abychom dostali rozšíření na bázi $\mathbb{R}^4$. Na vektory z_1, z_2, z_3, x_4 nyní aplikujeme Gramovu–Schmidtovu ortogonalizaci a získáme hledané rozšíření na ortonormální bázi.

Jelikož jsme rozšířili ortonormální bázi

$$Z = \{(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})^T, (\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2})^T, (-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})^T\}$$

řádkového prostoru A, stačí upravit pouze vektor x_4:

- $\langle x_4, z_1 \rangle = \frac{1}{2}$, $\langle x_4, z_2 \rangle = -\frac{1}{2}$, $\langle x_4, z_3 \rangle = \frac{1}{2}$, a tudíž $y_4 = (\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4})^T$,
- Normalizujeme y_4: $\|y_4\| = \frac{1}{2}$ a získáme $z_4 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T$.

Cv. 2.4 Co se stane, když Gramova–Schmidtova ortogonalizace

(a) dostane na vstup lineárně závislé vektory?

(b) dostane na vstup ortogonální vektory?

(c) dostane na vstup ortonormální vektory?

(d) dostane na vstup $-x_i$ namísto x_i? Jak se změní výstup?

Řešení:

(a) Mějme na vstupu $x_1, \dots, x_n$ a nechť $x_j = \sum_{i=1}^{j-1} \alpha_i x_i$ je vektor lineárně závislý na $x_1, \dots, x_{j-1}$. Buď navíc j nejmenší takové, že tato situace nastane. Lineární závislost znamená, že projekce vektoru x_j do podprostoru $\mathrm{span}\{x_1, \dots, x_{j-1}\}$ je vektor x_j sám. Při Gramově–Schmidtově ortogonalizaci postupně od vektoru odčítáme jeho kolmou projekce do podprostoru tvořeného vektory $x_1, \dots, x_{j-1}$. Tedy ortogonalizace poběží standardně až do chvíle, než se začne ortogonalizovat vektor x_j (proto jsme vzali j nejmenší). Při ortogonalizaci x_j dojte k tomu, že se tento vektor vynuluje.

V okamžiku, kdy budeme chtít tento nulový vektor znormovat (tj. vydělit jeho normou) se program zastaví, protože budeme chtít dělit 0.

(b) Při odčítání kolmé projekce na již zortonormalizované vektory se vektor nemění, neboť všechny projekce budou nulové vektory. Jediné, k čemu dojde, bude normalizace vektorů, které jsme dostali na vstupu.

(c) V tomto případě ani odčítání projekcí (nulových vektorů), ani normování (dělení 1) nemění vstupní vektory. Proto na výstupu dostaneme tytéž vektory, co na vstupu.

(d) Ortogonalizace poběží pro vstup $x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n$ stejně jako pro $x_1, \dots, x_{i-1}, -x_i, x_{i+1}, \dots, x_n$ stejně až do okamžiku, než přejdeme k ortogonalizaci i-tého vektoru. Označme jako p kolmou projekci i-tého vektoru do podprostoru $\mathrm{span}\{x_1, \dots, x_{i-1}\}$. Vektor p bude mít pro x_i a $-x_i$ opačné znaménko, tedy i výsledek po odečtení $y_i = x_i - p$ a $-x_i - (-p) = -x_i + p = -(x_i - p) = -y_i$ bude mít pro tyto případy odlišné znaménko. Normování tento vztah vektorů zachová.

Pro ostatní vektory už k žádné změně nedojde. Odčítáme totiž kolmou projekci do podprostoru, a ta není určena znaménkem bázického vektoru.

Výstupy obou ortogonalizací budou stejné až na znaménko i-tého vektoru.

Cv. 2.5 Nad $\mathbb{C}^3$ ortogonalizujte $x_1 = (i,i,i)^T$, $x_2 = (0,i,i)^T$, $x_3 = (0,0,i)^T$.

Řešení:

Pokud bychom nebyli omezeni na provedení Gramovy–Schmidtovy ortogonalizace, mohli bychom odečíst 2. vektor od 1. a 3. vektor od 2. Dostali bychom vektory $(i,0,0)^T$, $(0,i,0)^T$, $(0,0,i)^T$. Ty zřejmě generují stejný prostor jako původní vektory a zároveň jejich normy jsou rovny 1.

Postupujme nyní pomocí Gramovy–Schmidtovy ortogonalizace. Nejprve znormujme vektor $x_1 = (i,i,i)^T$. Norma vektoru je

$$\|x_1\| = \sqrt{\langle x_1, x_1\rangle} = \sqrt{x_1^T \overline{x_1}} = \sqrt{3(i \cdot (-i))} = \sqrt{-3i^2} = \sqrt{3}.$$

Proto $z_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(i,i,i)^T$. Dále

$$\begin{aligned} y_2 &= (0,i,i)^T - \langle x_2, z_1\rangle \tfrac{1}{\sqrt{3}}(i,i,i)^T = (0,i,i)^T - \tfrac{-2i^2}{\sqrt{3}}\tfrac{1}{\sqrt{3}}(0,i,i)^T \\ &= (0,i,i)^T - \tfrac{2}{3}(i,i,i)^T = \tfrac{1}{3}(-2i,i,i)^T. \end{aligned}$$

Normováním dostáváme

$$z_2 = \tfrac{1}{\|y_2\|}\tfrac{1}{3}(-2i,i,i)^T = \tfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\tfrac{1}{3}(-2i,i,i)^T = \tfrac{1}{\sqrt{6}}(-2i,i,i).$$

Nakonec

$$y_3 = (0,0,i)^T - \tfrac{1}{3}(i,i,i)^T - \tfrac{1}{6}(-2i,i,i)^T = \tfrac{1}{2}(0,-i,i)^T,$$

a tedy $z_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-i,i)^T$.

Řešením je $Z = \left\{z_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(i,i,i)^T,\ z_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2i,i,i)^T,\ z_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-i,i)^T\right\}$.

Cv. 2.6 Zortonormalizujete bázi podprostoru $\mathbb{R}^3$ popsaného rovnicí $x - y + z = 0$.

Řešení:
Množina řešení soustavy má tvar $\{(a-b,a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$. Jedna z možných bází je proto $(0,0,1)^T, (1,1,0)^T$. Vektory jsou na sebe ortogonální a norma $\|(0,0,1)^T\| = 1$, stačí proto znormovat $(1,1,0)^T$. Dostáváme dvojici vektorů $(0,0,1)^T$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T$. Řešení úlohy se může lišit v závislosti na volbě báze.

Cv. 2.7 Určete vzdálenost bodu $A = [5,5,3,3]$ od roviny procházející počátkem a body $B = [8,-1,1,-2]$ a $C = [4,-2,2,-1]$.

Řešení:
Můžeme postupovat Gramovou–Schmidtovou ortogonalizací aplikovanou na vektory odpovídající bodům B, C a A, tj. na vektory $x_1 = (8,-1,1,-2)^T, x_2 = (4,-2,2,-1)^T$ a $x_3 = (5,5,3,3)^T$. Hledaná vzdálenost je rovna právě normě vektoru y_3 z třetího kroku Gramovy–Schmidtovy ortogonalizace, který získáme odečtením projekce x_3 do $\operatorname{span}\{x_1, x_2\}$ od x_3 (geometrická představa viz strana 177 ve skriptech M. Hladíka – „nakolmení 3. vektoru“).

Zde se vyplatí malý předvýpočet. Vektory x_1, x_2 jsou lineárně nezávislé a navíc

$$\begin{pmatrix} 8 & -1 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 8 & -4 & 4 & -2 \\ 8 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 8 & -4 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

kde řádky x_1' a x_2' poslední matice jsou vzájemně kolmé a generují stejnou rovinu jako vektory x_1 a x_2.

Nyní můžeme spočítat projekci vektoru $x_3 = (5,5,3,3)^T$ do roviny generované vektory x_1' a x_2':

$$p = \frac{\langle x_3, x_1'\rangle}{\|x_1'\|^2} x_1' + \frac{\langle x_3, x_2'\rangle}{\|x_2'\|^2} x_2' = \frac{17}{17}(4,0,0,-1)^T + \frac{2}{2}(0,1,-1,0)^T = (4,1,-1,-1)^T.$$

(Protože x_1' a x_2' nemají jednotkovou normu, musíme při hledání projekce pracovat s ortonormálními vektory $\frac{x_1'}{\|x_1'\|}$ a $\frac{x_2'}{\|x_2'\|}$. Proto se ve výraze pro p objevuje ve jmenovatelích $\|x_1'\|^2$ resp. $\|x_2'\|^2$.)

V třetím kroku Gramovy–Schmidtovy ortogonalizace dostáváme

$$y_3 = x_3 - p = (5,5,3,3)^T - (4,1,-1,-1)^T = (1,4,4,4).$$

Vzdálenost bodu A od roviny obsahující B a C je

$$\|x_3 - p\| = \|y_3\| = \sqrt{1+16+16+16} = 7.$$

3. Ortogonální doplněk a projekce

Cv. 3.1 Pro podprostor V prostoru $\mathbb{R}^4$ určete $V^\perp, \{0\}^\perp, \{\}^\perp$.

Řešení:
Ortogonální doplněk množiny V je definovaný $V^\perp = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid \forall y \in V : \langle x, y\rangle = 0\}$. Proto $\{0\}^\perp = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid \langle x, 0\rangle = 0\} = \mathbb{R}^4$. Nakonec $\{\}^\perp = \mathbb{R}^4$, protože na vektory $x \in \mathbb{R}^4$ neklademe žádnou podmínku (neexistuje vektor v $\{\}$, na který by musel být x kolmý).

Cv. 3.2 Najděte podprostor $U \Subset \mathbb{R}^5$ takový, že $\dim U = \dim U^\perp$.

Řešení:
Takový podprostor nemůže existovat, neboť platí, že $\dim U^\perp = n - \dim U$. Pro $n = 5$ liché vidíme, že $\dim U$ a $\dim U^\perp$ musejí mít rozdílnou paritu a tedy i rozdílnou hodnotu.

Cv. 3.3 Spočítejte ortogonální doplněk vektoru $u = (1, 0, 0, -2)^T$ do prostoru $V = \operatorname{span}\{v, w\} = \operatorname{span}\{(1, 2, 4, 0)^T, (0, 1, 2, 1)^T\}$.

Řešení:
K řešení problému vede několik možných postupů. V první řadě můžeme určit kolmou projekci vektoru do podprostoru daného vektory v, w a tu od daného vektoru odečíst. Kolmou projekci lze určit zkonstruováním matice projekce do podprostoru $\operatorname{span}\{v, w\}$. Tato matice má tvar $P = A(A^TA)^{-1}A^T$, kde A je matice, která má ve sloupcích vektory v, w. Následně stačí jen spočítat $u - Pu$.

Druhá možnost by byla určit doplněk přímo. Provést na vektorech v, w, u Gramovu–Schmidtovu ortogonalizaci (bez normování v kroku pro u). Uvědomme si, že výsledný vektor získaný z u bude kolmý na podprostor generovaný vektory v, w a vznikl tak, že jsme od u odečetli kolmou projekci.

Poslední možností je využití toho, že projekce do ortogonálního doplňku prostoru $\operatorname{span}\{v, w\}$ se dá vyjádřit pomocí matice $I - P$, tedy řešením je $(I - P)u$. Všimněme si, že $(I - P)u = u - Pu$, což je přesně totéž, jako bychom aplikovali první postup.

Cv. 3.4 Určete ortogonální projekci p vektoru $a = (2, 2, 1, 5)^T$ do podprostoru generovaného ortonormálními vektory

$$Z = \left\{(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})^T,\ (\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2})^T,\ (-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})^T\right\}.$$

Dále určete souřadnice této projekce $[p]_Z$ vzhledem k bázi Z.

Řešení:
Protože Z je ortonormální bází podprostoru, můžeme postupovat přímo podle věty o projekci. Souřadnice vzhledem k $Z = \{z_1, z_2, z_3\}$ odpovídají Fourierovým koeficientům:

$$\langle a, z_1\rangle = 5, \quad \langle a, z_2\rangle = -2, \quad \langle a, z_3\rangle = 1,$$

a tedy $[p]_Z = (5, -2, 1)^T$.

Hledanou projekci potom získáme jako součet projekcí vektoru a na jednotlivé vektory dané ortonormální báze:

$$p = \langle a, z_1 \rangle z_1 + \langle a, z_2 \rangle z_2 + \langle a, z_3 \rangle z_3 = (1, 3, 2, 4)^T.$$

Cv. 3.5 Pomocí projekce najděte nejlepší přibližné řešení x' soustavy $Ax = b$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = (10, 5, 13, 9)^T.$$

Všimněte si, že sloupce matice A jsou vzájemně kolmé.

Určete také velikost chyby $\|Ax' - b\|$.

Dostanete stejná řešení jako řešení soustavy $A^T Ax = A^T b$?

Řešení:
Přibližné řešení dané soustavy nalezneme jako souřadnice projekce b do sloupcového prostoru $\mathcal{S}(A)$ matice A. Protože sloupce a_1, a_2 a a_3 matice A jsou vzájemně kolmé, je projekce vektoru b do sloupcového prostoru A přímo dána předpisem

$$b_{\mathcal{S}(A)} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\langle b, a_i \rangle}{\|a_i\|^2} a_i,$$

tedy $b_{\mathcal{S}(A)} = (4, 8, 13, 9)^T$ s koeficienty $x' = (3, -2, 1)^T$. Protože sloupce A jsou navzájem ortogonální (a tedy lineárně nezávislé), je nalezené x' určené jednoznačně.

Výsledná chyba je $\|Ax' - b\| = \sqrt{45}$.

Ano, výsledné řešení je stejné jako řešení soustavy normálních rovnic $A^T Ax = A^T b$.

Cv. 3.6 Hookův zákon vyjadřuje lineární úměrnost pružné deformace materiálu na použité síle. Následující tabulka obsahuje hodnoty průtahu pružiny (v palcích) v závislosti na síle/hmotnosti (v librách). Odhadněte koeficient úměrnosti.

síla F	5	7	8	10	12
průtah ℓ	11,1	15,4	17,5	22	26,3

Řešení:
Použijeme metodu nejmenších čtverců pro přibližné řešení soustavy $Ax = b$. Hledáme takové x', které minimalizuje chybu nalezeného přibližného řešení, tj. x', které minimalizujeme výraz $\|Ax' - b\|_2$. Jinými slovy hledáme x' pro které je Ax' rovno projekci vektoru $b \in \mathbb{R}^m$ do sloupcového prostoru $\mathcal{S}(A)$ matice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Matice projekce z $\mathbb{R}^m$ do $\mathcal{S}(A)$ je $A(A^T A)^{-1} A^T$, a proto projekce b do $\mathcal{S}(A)$ je

vektor $A(A^TA)^{-1}A^Tb$. Pro požadované x' dostáváme vztah $A(A^TA)^{-1}A^Tb = Ax'$, tedy $x' = (A^TA)^{-1}A^Tb$ a hledané x' je právě řešením soustavy normálních rovnic $A^TAx' = A^Tb$.

Pro zadané hodnoty síly F a průtahu ℓ hledáme koeficienty c a d, pro které platí $cF + d = \ell$ (např. pro první sloupec tabulky $c5 + d = 11{,}1$). Chceme tedy řešit soustavu $Ax = b$ tvaru

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 7 & 1 \\ 8 & 1 \\ 10 & 1 \\ 12 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11{,}1 \\ 15{,}4 \\ 17{,}5 \\ 22 \\ 26{,}3 \end{pmatrix}.$$

Pro tuto soustavu dostáváme normální soustavu rovnic $A^TAx' = A^Tb$ s maticí

$$A^TA = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 8 & 10 & 12 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 7 & 1 \\ 8 & 1 \\ 10 & 1 \\ 12 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 382 & 42 \\ 42 & 5 \end{pmatrix}$$

a vektorem pravých stran

$$A^Tb = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 8 & 10 & 12 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11{,}1 \\ 15{,}4 \\ 17{,}5 \\ 22 \\ 26{,}3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 838{,}9 \\ 92{,}3 \end{pmatrix}.$$

Přibližné řešení x' dává směrnici přímky (= koeficient úměrnosti) $c \approx 2{,}1774$ a absolutní člen přímky $d \approx 0{,}16986$.

Cv. 3.7 Rakovinné buňky se množí exponenciálně rychle v čase. Určete konkrétní vztah ve tvaru $y = ce^{dt}$ při následujících datech.

t čas	1	2	3	4	5
y (počet buněk)	16	27	45	74	122

Řešení:
Po zlogaritmování soustavy dostaneme standardní úlohu nejmenších čtverců. Soustava normálních rovnic má tvar $A^TA = A^Tb$, kde

$$A^TA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 55 & 15 \\ 15 & 5 \end{pmatrix}$$

a

$$A^T b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ln 16 \\ \ln 27 \\ \ln 45 \\ \ln 74 \\ \ln 122 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \ln 86141233151617576171622400 0 \approx 62.02062 \\ \ln 175504320 \approx 18,9832 \end{pmatrix}$$

Řešení: $d \approx 0{,}507$, $\ln c \approx 2{,}2753$, $c \approx 9{,}731$.

4. Ortogonální matice

Cv. 4.1 Buď $H(u) = I_n - \frac{2}{u^T u} uu^T$, $u \neq o$, Householderova matice.

(a) Dokažte, že $H(u)$ je symetrická.

(b) Dokažte, že $H(u)$ je ortogonální.

(c) Rozhodněte, zda I_n je Householderovou maticí pro určité $u \neq o$.

Řešení:

(a) Ověříme

$$H(u)^T = \left(I_n - \frac{2}{u^T u} uu^T \right)^T = I_n^T - \frac{2}{u^T u} (uu^T)^T = I_n - \frac{2}{u^T u} uu^T = H(u),$$

tudíž je $H(u)$ symetrická.

(b) Ověříme ortogonalitu Householderovy matice z definice:

$$\begin{aligned} H(u)^T H(u) = H(u)H(u) &= \left(I_n - \frac{2}{u^T u} uu^T \right) \left(I_n - \frac{2}{u^T u} uu^T \right) \\ &= I_n - 2\frac{2}{u^T u} uu^T + \frac{4}{(u^T u)^2} uu^T uu^T \\ &= I_n - \frac{4}{u^T u} uu^T + \frac{4}{(u^T u)^2} u(u^T u)u^T = I_n. \end{aligned}$$

(c) Rovnost $H(u) = I_n$ nemůže nikdy nastat, protože to by muselo $\frac{2}{u^T u} uu^T = 0$.

Cv. 4.2 Které z matic elementárních úprav jsou ortogonální?

Řešení:
Jsou to pouze dvě:

1. Matice prohození dvou řádků E_{ij}.
2. Matice $E_i(\pm 1)$ vynásobení řádku i číslem ± 1.

Cv. 4.3 Buď $p \in S_n$ permutace a $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ permutační matice definovaná tak, že $P_{ij} = 1$ pokud $i = p(j)$ a nula jinak.

(a) Jakou úpravu na matici $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ vykoná operace PA?

(b) Nahlédněte, že P vznikne z jednotkové matice zpermutováním jejích řádků podle p.

(c) Dokažte, že P je ortogonální matice.

(d) Nechť Q je permutační matice odpovídající permutaci q. Jaká matice odpovídá permutaci $p \circ q$?

(e) Dokažte, že P^T odpovídá permutaci p^{-1}.

(f) Jakou úpravu na matici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ vykoná operace AP?

Řešení:

(a) Součin PA zpermutuje řádky matice A podle permutace p.
Důkaz. Řádek $p(i)$ matice PA má tvar

$$(PA)_{p(i),*} = P_{p(i),*}A = e_i^T A = A_{i,*}.$$

Tudíž v řádku $p(i)$ matice PA je i-tý řádek původní matice A.

(b) Z předchozího bodu můžeme na matici $P = PI_n$ pohlížet jako na jednotkovou matici, jejíž řádky zpermutujeme podle p.

(c) P je ortogonální, protože její řádky tvoří ortonormální systém vektorů, jsou to vlastně zpermutované jednotkové vektory.

(d) Permutaci $p \circ q$ odpovídá matice PQ.
Důkaz (z významu). Pišme $PQ = P(QI_n)$, tudíž matice PQ vznikne z jednotkové matice tak, že nejprve zpermutujeme řádky podle permutace q a pak podle permutace p, což je totéž, jako když je zpermutujeme podle $p \circ q$.
Důkaz (z definice). Kdy nastane situace $(PQ)_{ij} = 1$? Protože $(PQ)_{ij} = P_{i,*}Q_{*,j}$, tak situace nastane právě tehdy, když i-tý řádek matice P i j-tý sloupec matice Q jsou stejné jednotkové vektory, např e_k. Protože $P_{i,*} = e_k^T$, je $i = p(k)$. Protože $Q_{*,j} = e_k$, je $k = q(j)$. Tudíž $i = p(k) = p(q(j)) = (p \circ q)(j)$.

(e) Protože $P^T = P^{-1}$, tak máme $P^TP = I_n$. Tudíž permutační matice P^T odpovídá permutaci p^{-1}.

(f) Součin AP zpermutuje sloupce matice A podle permutace p^{-1}.
Důkaz. Tvrzení můžeme snadno nahlédnout z předchozích bodů tak, že vyjádříme $AP = (P^TA^T)^T$, čili matice P^TA^T zpermutuje řádky matice A^T podle permutace p^{-1}.

Cv. 4.4 Rozhodněte o platnosti výroků:

(a) Má-li regulární matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ navzájem kolmé řádky, pak má i navzájem kolmé sloupce.

(b) Má-li matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ navzájem kolmé řádky velikosti 1, pak má i navzájem kolmé sloupce.

Řešení:

(a) Neplatí, uvažujme například matici $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Její řádky jsou na sebe navzájem kolmé, ale sloupce a sebe navzájem kolmé nejsou.

(b) Platí, protože matice je nutně je ortogonální.

5. Determinanty – výpočet

Cv. 5.1 Nechť $\pi = (1,5,3)(2,6)(4,8,7,9)$ a $\sigma = (1,2,7)(3,5)(4,9,6)(8)$ jsou dvě permutace z S_9. Spočtěte:

(a) složení $\pi \circ \sigma$ a složení $\sigma \circ \pi$,

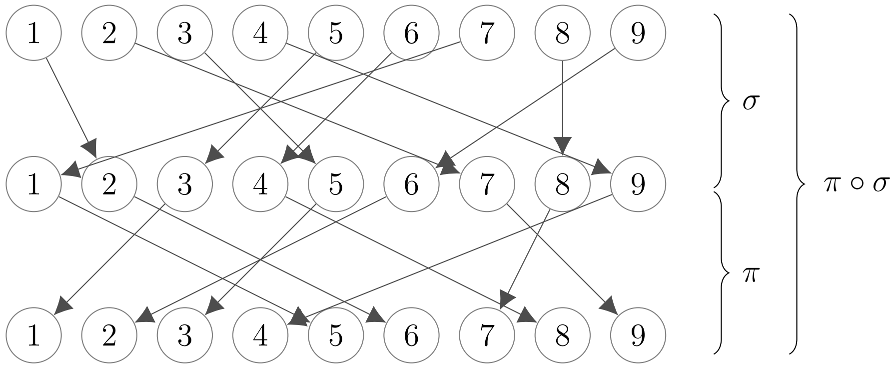
(b) inverzní permutace π^{-1} a σ^{-1}.

Řešení:

(a) Připomeňme definici skládání permutací:

$$\forall i \in \{1,\dots,n\} : (\pi \circ \sigma)(i) = \pi(\sigma(i)).$$

Zakresleme permutace π a σ schématicky:



Dostáváme $\pi \circ \sigma = (1,6,8,7,5)(2,9)(3,5)(4)$.
Obdobně můžeme spočítat $\sigma \circ \pi = (1,3,2,4,8)(5)(6,7)(9)$.

(b) Nahlédneme, že pořadí prvků v cyklech inverzní permutace je otočené. Tedy získáváme $\pi^{-1} = (1,3,5)(2,6)(4,9,7,8)$ a $\sigma^{-1} = (1,7,2)(3,5)(4,6,9)(8)$.

Cv. 5.2 Jaké znaménko mají dané permutace?

(a) permutace $\pi(1) = 2,\ \pi(2) = 3,\ \pi(3) = 1$,

(b) permutace $\sigma(1) = 2,\ \sigma(2) = 3,\ \sigma(3) = 4,\ \sigma(4) = 1,\ \sigma(5) = 7,\ \sigma(6) = 5,\ \sigma(7) = 6$,

(c) identická permutace $id \in S_n$, pro kterou $id(i) = i$ pro každé $i \in \{1,\dots,n\}$,

(d) transpozice (permutace, která zamění přesně dva prvky, třeba $\tau(1) = 2,\ \tau(2) = 1,\ \tau(n) = n$ pro všechny $n > 2$).

Řešení:

(a) Permutace obsahuje jeden cyklus $(1,2,3)$, tedy $\operatorname{sgn}(\pi) = (-1)^{3-1} = 1$.

(b) Permutace je tvořena dvěma cykly $(1,2,3,4)$ a $(5,7,6)$ tedy $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{7-2} = -1$.

(c) Každé číslo tvoří samo o sobě cyklus a identickou permutaci tedy můžeme rozložit jako $(1)(2)\dots(n)$. Máme tedy n cyklů a znaménko permutace je $(-1)^{n-n} = 1$.

(d) Dvě prohozená čísla tvoří cyklus délky dva a zbylá čísla tvoří každé triviální cyklus délky jedna. Uvedený příklad transpozice můžeme zapsat jako $(1,2)(3)(4)\dots(n)$. Máme tedy $n-1$ cyklů a znaménko permutace je proto $(-1)^{n-(n-1)} = -1$.

Cv. 5.3 Nechť $\pi = (1,3)(2,9,7,6)(4)(5,8)$ a $\sigma = (1,4,5)(3,6,9,8,7)(2)$. Určete:

(a) znaménka $\operatorname{sgn}(\pi)$ a $\operatorname{sgn}(\sigma)$,

(b) znaménka $\operatorname{sgn}(\pi \circ \sigma)$ a $\operatorname{sgn}(\sigma \circ \pi)$,

(c) znaménka $\operatorname{sgn}(\pi^{-1})$ a $\operatorname{sgn}(\sigma^{-1})$.

Řešení:

(a) Permutace π je na $n = 9$ prvcích a je složena ze 4 cyklů. Tedy $\operatorname{sgn}(\pi) = (-1)^{9-4} = -1$.
Obdobně $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{9-3} = 1$.

(b) Znaménko složené permutace je součin znamének jednotlivých permutací. Proto dostáváme $\operatorname{sgn}(\pi \circ \sigma) = \operatorname{sgn}(\pi)\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)\cdot 1 = -1$.
Obdobně $\operatorname{sgn}(\sigma \circ \pi) = -1$.

(c) Z definice složení permutací dostáváme $\pi \circ \pi^{-1} = id$. Víme, že $\operatorname{sgn}(id) = 1$. Dostáváme tedy, že $\operatorname{sgn}(\pi^{-1}) = \operatorname{sgn}(\pi) = -1$.
Obdobně $\operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) = 1$.

Cv. 5.4 Spočítejte determinanty následujících reálných matic. Použijte výpočet z definice, pomocí Laplaceova rozvoje podle řádku a pomocí Gaussovy eliminace.

(a) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

(c) $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(d) $D = \begin{pmatrix} 18 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 24 \end{pmatrix}$

Řešení:

(a) Budeme počítat z definice:

$$
\begin{aligned}
\det(A) = \det\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}
&= A_{1,1}A_{2,2}A_{3,3} + A_{1,2}A_{2,3}A_{3,1} + A_{1,3}A_{2,1}A_{3,2} \\
&\quad - A_{1,1}A_{2,3}A_{3,2} - A_{1,2}A_{2,1}A_{3,3} - A_{1,3}A_{2,2}A_{3,1} \\
&= 4 \cdot (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 - 1 \cdot 0 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) \cdot 1 \\
&= -9
\end{aligned}
$$

Determinant matice je -9.

(b) Budeme řešit pomocí Gaussovy eliminace.

$$
\begin{aligned}
\det(B) = \det\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}
&= -1 \det\begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} && \text{(Výměna 1. a 2. řádku, det se násobí } -1\text{)} \\
&= -2 \det\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} && \text{(Vydělíme 1. řádek 2, det se zmenší 2-krát)} \\
&= -2 \det\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} && \text{(Přičteme 3-krát 1. řádek k 2., det se nemění)} \\
&= -2 \det\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} && \text{(Přičteme 2-krát 1. řádek k 3., det se nemění)} \\
&= 2 \det\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & 5 \end{pmatrix} && \text{(Výměna 2. a 3. řádku, det se násobí } -1\text{)} \\
&= 2 \det\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -30 \end{pmatrix}. \\
& && \text{(Odečteme 5-krát 2. řádek od 3., det. se nemění)}
\end{aligned}
$$

Dostáváme horní trojúhelníkovou matici. Existuje jediná permutace σ taková, že

$$\Pi_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} \neq 0,$$

a to identita. Determinant vzniklé horní trojúhelníkové matice je $(-1) \cdot 1 \cdot (-30) = 30$. A tedy determinant původní matice je 60.

(c) Použijeme Laplaceův rozvoj podle prvního řádku. Následný výpočet determinantů matic velikosti 2×2 provedeme z definice.

$$\begin{aligned}
\det(C) &= \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= (-1)^{1+1} \cdot 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&\quad + (-1)^{1+3} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= (-1) \cdot 1 \cdot (1 \cdot 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 \cdot 1) + 1 \cdot 1 \cdot (1 \cdot 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 \cdot 1) \\
&= 2
\end{aligned}$$

Determinant matice je 2.

(d) Nejprve použijeme elementární řádkové úpravy a upravíme matici následovně. Využíváme pouze elementární úpravu „přičtení k-násobku i-tého řádku k j-tému“. Tato úprava nemění determinant, a tak získáváme:

$$\begin{aligned}
\det(D) &= \det \begin{pmatrix} 18 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 24 \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 24 \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 11 & 11 & 11 \\ 0 & 0 & 13 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Nyní si všimneme, že permutace $\sigma \in S_3$ přispívá k celkovému součtu v hledaném determinantu *nenulovou* hodnotou právě tehdy, když vybírá první sloupec v prvním řádku a třetí sloupec ve třetím řádku, tj. $\sigma(1) = 1$ a $\sigma(3) = 3$. Taková permutace v S_3 je však právě jedna – identická permutace. Tedy determinant výsledné matice je roven součinu jejích diagonálních prvků $7 \cdot 11 \cdot 13 = 1001$. Vzhledem k tomu, že provedené řádkové úpravy neměnily determinant, je determinant původní matice také 1001.

Cv. 5.5 Spočtěte determinant následujících matic:

(a) $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n \\ -1 & 0 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 \\ -1 & -2 & 0 & 3 & 4 & \dots & n-1 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 4 & \dots & n-1 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & 0 & \dots & n-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \\ -1 & -2 & -3 & -4 & \dots & 1-n & 0 \end{pmatrix},$$

(b) $B = \begin{pmatrix} a_1 + x & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 + x & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 + x & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n + x \end{pmatrix}.$

Řešení:

(a) První řádek přičteme ke všem ostatním. Získáme horní trojúhelníkovou matici, jejíž diagonála je postupně tvořena čísly 1 až n. Determinant matice je tudíž roven $n!$.

(b) Poslední řádek odečteme od všech předchozích (hodnoty a_i zůstanou pouze v posledním řádku). Dostáváme matici

$$B' = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & \dots & -x \\ 0 & x & 0 & \dots & -x \\ 0 & 0 & x & \dots & -x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n + x \end{pmatrix}.$$

Poté využijeme rovnosti $\det(B) = \det(B^T)$, matici transponujeme, přičteme všechny řádky k poslednímu a znovu matici transponujeme. Jinými slovy jsme k poslednímu sloupci B přičetli všechny předchozí sloupce. Dostaneme

$$B'' = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x + \sum_{i=1}^n a_i \end{pmatrix}.$$

Determinant je roven $(a_1 + \ldots + a_n + x)x^{n-1}$.

6. Determinanty – použití

Cv. 6.1 Geometrickou interpretací determinantu je objem. Přesněji absolutní hodnota determinantu určuje, jak moc lineární zobrazení $x \mapsto Ax$ určené maticí A zvětšuje/zmenšuje velikost objektů[1]. Tedy pokud máme matice 2×2, absolutní hodnota jejich determinantu představuje kolikrát se zvětší obsah rovinného geometrického útvaru (například jednotkového čtverce) po provedené transformaci. Absolutní hodnota determinantu matice velikosti 3×3, pak udává kolikrát se zvětší objem geometrického 3 dimenzionálního útvaru (například krychle) provedením lineární transformace dané příslušnou maticí.

Zároveň lze na determinant nahlížet jako na obsah rovnoběžnostěnu daného sloupci matice. Pokud příslušnou lineární transformaci provedeme na čtverec jehož strany jsou dány vektory $(1,0)^T$ a $(0,1)^T$ – čtverec reprezentovaný I_2, bude tento čtverec zobrazen na rovnoběžnostěn daný sloupci matice.

Za cvičení spočtěte následující determinanty a ověřte si intuici pro následující matice:

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

(b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

(c) $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$,

(d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

(e) $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

(f) $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Řešení:

(a) V tomto případě lineární zobrazení zobrazí každou plochu na sebe samu. Tedy plochy se nemění a očekáváme, že determinant bude 1.

Vypočteme determinant z definice, následovně:

$$\det(A) = A_{1,1}A_{2,2} - A_{1,2}A_{2,1} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1.$$

(b) Toto lineární zobrazení vezme čtverec jehož strany jsou dány vektory $(1,0)^T$ a $(0,1)^T$ (obsah je 1) a zobrazí jej na obdélník jehož strany jsou $(2,0)^T$ a

[1]Doporučujeme zhlédnout 10-minutové video o determinantech z kanálu „Three blue, one brown“, viz `https://www.youtube.com/watch?v=Ip3X9LOh2dk`

$(0,1)^T$ (obsah je 2). Tedy zobrazení „nafukuje“ prostor 2-krát a očekáváme, že $\det(B) = 2$.

Vypočteme determinant z definice, následovně:

$$\det(B) = B_{1,1}B_{2,2} - B_{1,2}B_{2,1} = 2 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 2.$$

(c) Toto lineární zobrazení vezme čtverec daný vektory $(1,0)^T$ a $(0,1)^T$ (obsah je 1) a zobrazí jej na čtverec jehož strany jsou $(2,0)^T$ a $(0,2)^T$ (obsah je 4). Tedy zobrazení „nafukuje“ prostor 4-krát a očekáváme, že $\det(C) = 4$.

Vypočteme determinant z definice, následovně:

$$\det(C) = C_{1,1}C_{2,2} - C_{1,2}C_{2,1} = 2 \cdot 2 - 0 \cdot 0 = 4.$$

(d) Toto lineární zobrazení vezme čtverec daný vektory $(1,0)^T$ a $(0,1)^T$ (obsah je 1) a zobrazí jej na rovnoběžník jehož strany jsou $(1,0)^T$ a $(2,1)^T$. Obsah rovnoběžníku je stále 1 (představte si, že vznikl tak, že vezmete stěnu vystavěnou z kostek a poté se opřete o její levou stranu, posunete jednotlivé kostky vůči sobě a stěnu zkosíte, ale obsah zůstane zachován). Tedy zobrazení zachovává plochy a očekáváme, že $\det(D) = 1$.

Vypočteme determinant z definice, následovně:

$$\det(D) = D_{1,1}D_{2,2} - D_{1,2}D_{2,1} = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 0 = 1.$$

(e) Toto lineární zobrazení vezme čtverec daný vektory $(1,0)^T$ a $(0,1)^T$ (obsah je 1) a zobrazí jej na úsečku danou vektorem $(1,0)^T$. Vzhledem k tomu, že jsme zobrazili na vlastní podprostor $\mathbb{R}^2$ je obsah roven 0. Očekáváme tedy, že determinant bude nulový.

Vypočteme determinant z definice, následovně:

$$\det(E) = E_{1,1}E_{2,2} - E_{1,2}E_{2,1} = 1 \cdot 0 - 0 \cdot 0 = 0.$$

(f) Pro matice velikosti 3×3 platí podobná geometrická intuice, pouze místo obsahu udává determinant objem. Zdůrazníme poslední případ (lineární zobrazení na podprostor) i pro matice 3×3.

Toto lineární zobrazení vezme krychli danou vektory $(1,0,0)^T$, $(0,1,0)^T$ a $(0,0,1)^T$ (objem krychle je 1) a zobrazí ji na čtverec daný vektory $(1,0,0)^T$ a $(0,1,0)^T$. Vzhledem k tomu, že obraz zobrazení je podprostor $\mathbb{R}^3$, získáváme 2D útvar a jeho objem je tedy roven 0. Očekáváme tedy, že determinant bude nulový.

Vypočteme determinant z definice, následovně:

$$\begin{aligned}\det(F) &= F_{1,1}F_{2,2}F_{3,3} + F_{1,2}F_{2,3}F_{3,1} + F_{1,3}F_{2,1}F_{3,2} \\ &\quad - F_{1,1}F_{2,3}F_{3,2} - F_{1,2}F_{2,1}F_{3,3} - F_{1,3}F_{2,2}F_{3,1} \\ &= 1 \cdot 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \cdot 0 - 1 \cdot 0 \cdot 0 - 0 \cdot 0 \cdot 0 - 0 \cdot 1 \cdot 0 \\ &= 0.\end{aligned}$$

Cv. 6.2 Pomocí adjungované matice najděte matici inverzní (pokud existuje) k následující matici nad tělesem reálných čísel i nad tělesem $\mathbb{Z}_5$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

Adjungovaná matice má složky: $(\mathrm{adj}(A))_{i,j} = (-1)^{i+j}|A^{j,i}|$, kde $A^{j,i}$ je matice vzniklá odstraněním j-tého řádku a i-tého sloupce z matice A (Pozor, všimněte si prohození indexů!).

Inverze se spočítá: $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,\mathrm{adj}(A)$.

Nad $\mathbb{R}$ počítáme adjungovanou matici následovně. Nejprve spočteme determinanty podmatic:

$$\begin{aligned}
\det(A^{1,1}) &= \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1,\\
\det(A^{2,1}) &= \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -1,\\
\det(A^{3,1}) &= \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1,\\
\det(A^{1,2}) &= \det\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -2,\\
\det(A^{2,2}) &= \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1,\\
\det(A^{3,2}) &= \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = 2,\\
\det(A^{1,3}) &= \det\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -2,\\
\det(A^{2,3}) &= \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1,\\
\det(A^{3,3}) &= \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = 1.
\end{aligned}$$

Dostáváme adjungovanou matici:

$$\mathrm{adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 & (-1)\cdot(-1) & -1 \\ (-1)\cdot(-2) & 1 & (-1)\cdot 2 \\ -2 & (-1)\cdot 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nyní spočteme determinant matice A. Využije rozvoje podle řádků a determinantů již spočtených výše. Dostáváme

$$\det(A) = 1\cdot\det(A^{1,1}) + 0\cdot\det(A^{1,2}) + 1\cdot\det(A^{1,3}) = 1 - 2 = -1$$

Konečně adjungovanou matici vynásobíme $\frac{1}{\det(A)} = -1$ a získáme inverzní matici:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Obdobně můžeme počítat nad $\mathbb{Z}_5$, pouze všechny kroky provádíme modulo 5.

$$|A| = -1 = 4, \quad \operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Cv. 6.3 Rozhodněte, pro které hodnoty parametru $a \in \mathbb{R}$ je následující matice regulární:

$$A = \begin{pmatrix} 2a & 3 & -1 \\ 5-a & -1 & -2 \\ 2+3a & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Řešení:
Využijeme Kritérium regularity, které říká, že A je regulární právě tehdy, když $\det(A) \neq 0$. Spočteme determinant:

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \det \begin{pmatrix} 2a & 3 & -1 \\ 5-a & -1 & -2 \\ 2+3a & 2 & 4 \end{pmatrix} \\
&= 2a \det \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - 3 \det \begin{pmatrix} 5-a & -2 \\ 2+3a & 4 \end{pmatrix} - 1 \det \begin{pmatrix} 5-a & -1 \\ 2+3a & 2 \end{pmatrix} \\
&= 2a(-4+4) - 3((5-a)4 - (-2)(2+3a)) - ((5-a)2 - (-1)(2+3a)) \\
&= 35a - 84.
\end{aligned}$$

Dostáváme tedy, že A je singulární právě tehdy, když $a = \frac{84}{35} = \frac{12}{5}$.

Cv. 6.4 Řešte následující soustavu rovnic pomocí Cramerova pravidla.

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 7 \\ -1 & 1 & -2 & -6 \\ 3 & -1 & 3 & 10 \end{array}\right).$$

Řešení:
Nejprve pomocí Gaussovy eliminace spočteme determinant A.

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{3} \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & -9 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{3} \cdot (-1) \cdot 3 \cdot (-7) = -7.
\end{aligned}$$

Nyní spočteme determinanty matic, kde postupně nahrazujeme první, druhý a třetí sloupec pravou stranou rovnice.

1) Dopočítáme první složku výsledného vektoru (nahrazujeme první sloupec):

$$
\begin{aligned}
&\det\begin{pmatrix} 7 & 1 & 3 \\ -6 & 1 & -2 \\ 10 & -1 & 3 \end{pmatrix} \\
&= (-1)^{1+2}\cdot 1 \det\begin{pmatrix} -6 & -2 \\ 10 & 3 \end{pmatrix} + (-1)^{2+2}\cdot 1 \det\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 10 & 3 \end{pmatrix} \\
&\quad + (-1)^{3+2}\cdot(-1)\det\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{(Rozvoj dle 2. sloupce)} \\
&= (-1)(-6\cdot 3 - (-2)\cdot 10) + (7\cdot 3 - 3\cdot 10) + (7\cdot(-2) - 3\cdot(-6)) \\
&= -(-18+20) + (21-30) + (-14+18) = -2-9+4 = -7
\end{aligned}
$$

Dostáváme $x_1 = \frac{-7}{-7} = 1$.

2) Dopočítáme druhou složku výsledného vektoru (nahrazujeme druhý sloupec):

$$
\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ -1 & -6 & -2 \\ 3 & 10 & 3 \end{pmatrix} &= \det -\begin{pmatrix} -1 & -6 & -2 \\ 2 & 7 & 3 \\ 3 & 10 & 3 \end{pmatrix} = \det -\begin{pmatrix} -1 & -6 & -2 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & -8 & -3 \end{pmatrix} \\
&= \det \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & -6 & -2 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & 40 & 15 \end{pmatrix} = \det \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & -6 & -2 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = 7.
\end{aligned}
$$

Dostáváme $x_2 = \frac{7}{-7} = -1$.

3) Dopočítáme třetí složku výsledného vektoru (nahrazujeme třetí sloupec):

$$
\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ -1 & 1 & -6 \\ 3 & -1 & 10 \end{pmatrix} &= -\det\begin{pmatrix} -1 & 1 & -6 \\ 2 & 1 & 7 \\ 3 & -1 & 10 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} -1 & 1 & -6 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & -8 \end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{3}\det\begin{pmatrix} -1 & 1 & -6 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 6 & -24 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\det\begin{pmatrix} -1 & 1 & -6 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -14 \end{pmatrix} = -14.
\end{aligned}
$$

Dostáváme $x_3 = \frac{-14}{-7} = 2$.

Závěr: Řešením soustavy je vektor $x = (1, -1, 2)^T$.

7. Vlastní čísla – základy

Cv. 7.1 Vlastní vektor matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ reprezentuje směr, který se při lineárním zobrazení $f(x) = Ax$ zobrazí opět na ten samý směr (mění se tedy pouze velikost nebo orientace vektoru). Pro vlastní vektor v matice A tedy platí, že přímka $\operatorname{span}\{v\}$ se při zobrazení f zobrazí do sebe sama. Příslušné vlastní číslo matice pak představuje škálování v tomto invariantním směru.

Následující matice reprezentují geometrická zobrazení v rovině. Nalezněte jejich vlastní čísla a k nim příslušné vlastní vektory a pokuste se je geometricky vysvětlit:

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$,

(b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

(c) $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$,

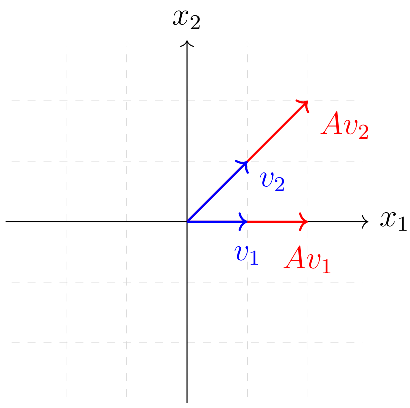
(d) $D = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Řešení:

(a) Lineární zobrazení $f(x) = Ax$ odpovídá dvojnásobnému zvětšení vektoru x, tedy

$$f\left((x_1, x_2)^T\right) = 2(x_1, x_2)^T.$$

Libovolný nenulový vektor $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ je proto vlastním vektorem matice A – zobrazení f ho dvakrát prodlouží, ale nezmění jeho směr. Vlastním číslem matice A je $\lambda = 2$ odpovídající škálování vektoru x při zobrazení f.

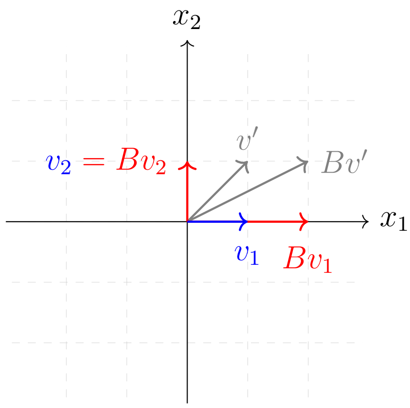


(b) Lineární zobrazení $f(x) = Bx$ odpovídá dvojnásobnému zvětšení vektoru x v první souřadnici, tedy

$$f\left((x_1, x_2)^T\right) = (2x_1, x_2)^T.$$

Vektory na ose x_1 se dvojnásobně prodlouží a nezmění svůj směr – každý vektor ve tvaru $(\alpha, 0)$ pro $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ je tedy vlastním vektorem matice B s příslušným vlastním číslem $\lambda_1 = 2$.

Vektory na ose x_2 se při zobrazení f nezmění, proto také každý vektor $(0, \alpha)$ pro $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ je vlastním vektorem B a odpovídá vlastnímu číslu $\lambda_2 = 1$. Vektory mimo osy při zobrazení f mění směr.



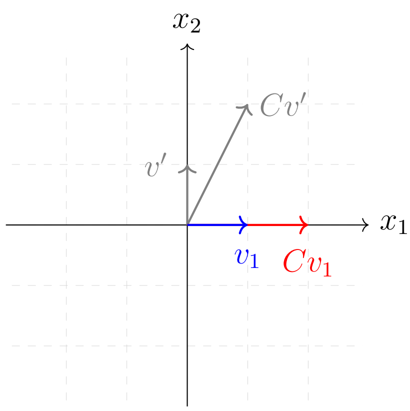
(c) Lineární zobrazení $f(x) = Cx$ odpovídá zkosení a zároveň zvětšení, pro zobrazení platí

$$f\left((x_1, x_2)^T\right) = (2x_1 + x_2, 2x_2)^T.$$

Vlastní vektory matice C jsou všechny nenulové vektory $(\alpha, 0)$ ležící na ose x_1, protože tyto vektory při zobrazení f směr nemění. Tyto vektory zobrazení dvojnásobně prodlužuje, protože platí

$$f\left((\alpha, 0)^T\right) = (2\alpha, 0)^T = 2(\alpha, 0)^T,$$

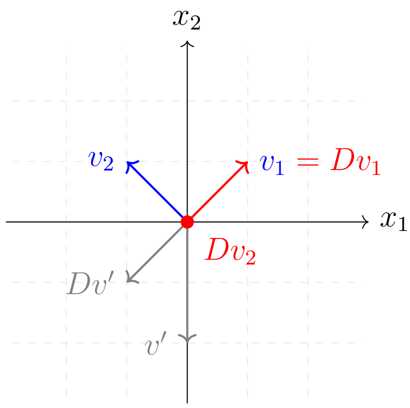
příslušné vlastní číslo je tedy $\lambda = 2$.



(d) Lineární zobrazení $f(x) = Dx$ odpovídá kolmé (ortogonální) projekci na osu 1. a 3. kvadrantu (tedy přímku $x_1 = x_2$), platí

$$f\left((x_1, x_2)^T\right) = \frac{1}{2}(x_1 + x_2, x_1 + x_2)^T.$$

Nenulové vektory ležící na této ose se při projekci f zobrazí samy na sebe, jsou tedy vlastními vektory matice D. Nemění se ani velikost a orientace těchto vektorů, odpovídající vlastní číslo je proto $\lambda_1 = 1$.



Dalšími vlastními vektory jsou všechny nenulové vektory kolmé na osu 1. a 3. kvadrantu, tj. vektory ve tvaru $(-\alpha, \alpha)$ pro $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Tyto vektory se při projekci f zobrazí do počátku $(0, 0)$, odpovídající vlastní číslo je $\lambda_2 = 0$ (vektory se škálují na 0-násobek původní délky). Můžeme snadno ověřit, že podmínka z definice vlastního čísla a vlastního vektoru je splněna i pro tento případ:

$$Dx = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot x.$$

Cv. 7.2 Určete charakteristický polynom a nalezněte vlastní čísla a odpovídající vlastní vektory následujících matic nad tělesem $\mathbb{C}$. Jsou vlastní vektory jednoznačné?

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$,

(b) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$,

(c) $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

<u>Řešení</u>:

(a) Charakteristický polynom matice A vzhledem k proměnné λ je polynom

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n).$$

Jelikož jsou vlastní čísla matice A právě kořeny polynomu $p_A(\lambda)$, můžeme charakteristický polynom využít pro jejich výpočet.
Pro zadanou matici A dostaneme charakteristický polynom

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) &= \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 6 \\ 6 & -3-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (2-\lambda)(-3-\lambda) - 6 \cdot 6. \end{aligned}$$

Dále můžeme tento polynom upravit a najít jeho kořeny:

$$p_A(\lambda) = (2-\lambda)(-3-\lambda) - 6 \cdot 6 = \lambda^2 + \lambda - 42 = (\lambda - 6)(\lambda + 7).$$

Kořeny polynomu, a tedy vlastními čísly matice A, jsou hodnoty $\lambda_1 = 6$ a $\lambda_2 = -7$.

Vlastní vektor příslušný k danému vlastnímu číslu λ najdeme jako bázi jádra matice $A - \lambda I_n$. Pro vlastní číslo $\lambda_1 = 6$ tedy hledáme bázi jádra matice

$$\begin{pmatrix} 2-6 & 6 \\ 6 & -3-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 6 & -9 \end{pmatrix},$$

kterou tvoří např. vektor $x_1 = (3, 2)^T$. Podobně pro $\lambda_2 = -7$ hledáme bázi $\mathrm{Ker}(A - \lambda_2 I_2)$, tj. bázi jádra matice

$$\begin{pmatrix} 2-(-7) & 6 \\ 6 & -3-(-7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Tu tvoří např. vektor $x_2 = (2, -3)^T$.

Matice A má tedy vlastní číslo $\lambda_1 = 6$ s odpovídajícím vlastním vektorem $x_1 = (3, 2)^T$ a vlastní číslo $\lambda_2 = -7$ s odpovídajícím vlastním vektorem $x_2 = (2, -3)^T$. Vlastní vektory nejsou určeny jednoznačně – každý nenulový násobek vlastního vektoru je také vlastním vektorem.

(b) Charakteristický polynom matice B je

$$\begin{aligned} p_B(\lambda) = \det(B - \lambda I_2) = \det \begin{pmatrix} 0-\lambda & 1 \\ -2 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\ = -\lambda(2-\lambda) + 2 = \lambda^2 - 2\lambda + 2. \end{aligned}$$

Tento polynom má pouze komplexní kořeny, a to

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = 1 \pm i.$$

Vlastní vektor pro $\lambda_1 = 1 + i$ tvoří bázi jádra matice

$$\begin{pmatrix} 0-(1+i) & 1 \\ -2 & 2-(1+i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-i & 1 \\ -2 & 1-i \end{pmatrix}.$$

Bázi jádra najdeme (stejně jako pro reálné matice) pomocí Gaussovy eliminace. Přičtením $(-1+i)$-násobku 1. řádku k 2. řádku dostaneme:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -1-i & 1 \\ -2 & 1-i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1-i & 1 \\ -2+(-1-i)(-1+i) & 1-i+1(-1+i) \end{pmatrix} \sim \\ \sim \begin{pmatrix} -1-i & 1 \\ -2+2 & 1-i-1+i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1-i & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Všechna řešení soustavy $(B - \lambda_1 I_2)x = 0$ jsou ve tvaru $z(1, 1+i)$ pro $z \in \mathbb{C}$. Hledaným vlastním vektorem je tedy např. vektor $x_1 = (1, 1+i)^T$. Druhý vlastní vektor x_2 pro $\lambda_2 = 1 - i$ tvoří bázi jádra matice

$$\begin{pmatrix} 0-(1-i) & 1 \\ -2 & 2-(1-i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+i & 1 \\ -2 & 1+i \end{pmatrix},$$

je to např. vektor $x_2 = (1, 1-i)^T$.

Matice B má tudíž vlastní číslo $\lambda_1 = 1 + i$ s odpovídajícím vlastním vektorem $x_1 = (1, 1+i)^T$ a vlastní číslo $\lambda_2 = 1 - i$ s odpovídajícím vlastním vektorem $x_2 = (1, 1-i)^T$.

(c) Postupujeme obdobně jako u matic 2×2. Charakteristický polynom matice C vyjádříme pomocí determinantu:

$$\begin{aligned} p_C(\lambda) = \det(C - \lambda I_3) &= \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & -3-\lambda & 3 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{pmatrix} = \\ &= (2-\lambda)(-3-\lambda)(-2-\lambda) + (-1)\cdot 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 5 \cdot 0 - \\ &\quad - 2 \cdot (-3-\lambda) \cdot (-1) - 3 \cdot 0 \cdot (2-\lambda) - (-1) \cdot 5 \cdot (-2-\lambda) \\ &= -(\lambda+1)^3. \end{aligned}$$

Matice C má tedy vlastní číslo $\lambda = -1$. Dále najdeme bázi jádra matice

$$\begin{pmatrix} 2-(-1) & -1 & 2 \\ 5 & -3-(-1) & 3 \\ -1 & 0 & -2-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

kterou tvoří např. $\{(1,1,-1)^T\}$. Matice C má (trojnásobné) vlastní číslo $\lambda = -1$, kterému přísluší jeden vlastní vektor $x = (1,1,-1)^T$.

Cv. 7.3 Určete charakteristický polynom a nalezněte vlastní čísla matice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 0 & 7 & -3 \end{pmatrix}.$$

Řešení:
Charakteristický polynom matice A opět dostaneme jako determinant

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_5) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1-\lambda & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 4 & 8 & 0 & 7 & -3-\lambda \end{pmatrix}.$$

Pro vyjádření determinantu této matice je výhodné použít Laplaceův rozvoj, např. podle 2. řádku (obsahuje jediný nenulový prvek), následně podle 4. řádku a nakonec podle 3. sloupce. Tím dostaneme charakteristický polynom

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= (2-\lambda)(1-\lambda)(1-\lambda) \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 4 & -3-\lambda \end{pmatrix} \\ &= -(2-\lambda)(1-\lambda)^3(1+\lambda). \end{aligned}$$

Vlastní čísla matice A jsou tedy 2, 1 (trojnásobné) a -1.

Cv. 7.4 Najděte nad tělesem $\mathbb{Z}_5$ všechna vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Řešení:
Postupujeme obdobně jako v předchozích úlohách. Charakteristický polynom matice A je

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} 4-\lambda & 0 & 2 \\ 4 & 1-\lambda & 1 \\ 2 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix} = 4\lambda^3 + 4\lambda^2 + 2.$$

Jelikož pracujeme s charakteristickým polynomem v konečném tělese $\mathbb{Z}_5$, které obsahuje pouze 5 prvků, můžeme kořeny polynomu efektivně najít prostým dosazením. Snadno ověříme, že platí $p_A(1) = 0$ a $p_A(2) = 0$, tedy vlastní čísla matice A jsou 1 a 2.

Dále najdeme odpovídající vlastní vektory jako bázi $\mathrm{Ker}(A-1I_3)$ a $\mathrm{Ker}(A-2I_3)$, tedy bázi jádra pro matice

$$\begin{pmatrix} 4-1 & 0 & 2 \\ 4 & 1-1 & 1 \\ 2 & 0 & 4-1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 4-2 & 0 & 2 \\ 4 & 1-2 & 1 \\ 2 & 0 & 4-2 \end{pmatrix}.$$

Výpočtem nad $\mathbb{Z}_5$ zjistíme, že první matici odpovídá báze jádra např. $\{(1,0,1)^T, (0,1,0)^T\}$ a druhé matici báze $\{(1,3,4)^T\}$.

Matice A má tedy vlastní vektory $(1,0,1)^T$, $(0,1,0)^T$ příslušné vlastnímu číslu 1 a vlastní vektor $(1,3,4)^T$ příslušný vlastnímu číslu 2.

Cv. 7.5 Známe tři vlastní čísla matice

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 7 & -7 \\ 4 & 5 & 2 & -2 \\ 16 & 4 & 15 & -8 \\ 30 & 4 & 26 & -19 \end{pmatrix},$$

a to $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -4$ a $\lambda_3 = 5$. Dopočítejte zbylé vlastní číslo.

Řešení:
K řešení úlohy můžeme využít znalost vztahů mezi součinem vlastních čísel a determinantem matice, respektive mezi součtem vlastních čísel a stopou matice:

$$\det(A) = \lambda_1 \cdots \lambda_n, \qquad \mathrm{trace}(A) = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n.$$

Výpočet determinantu je pracnější, ale i využití tohoto vztahu vede k řešení. Determinant matice A můžeme spočítat např. Gaussovou eliminací, dostaneme $\det(A) = -420$. Pro zbylé vlastní číslo potom platí

$$\det(A) = -420 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 = 3 \cdot (-4) \cdot 5 \cdot \lambda_4,$$

tedy $\lambda_4 = -420/(-60) = 7$.

Výhodnější je ale použít vztah mezi součtem vlastních čísel a stopou matice. Stopa matice je součet prvků na diagonále, tedy

$$\text{trace}(A) = \sum_{i=1}^{4} a_{ii} = 10 + 5 + 15 - 19 = 11.$$

Protože je stopa matice zároveň rovná součtu vlastních čísel, platí pro zbylé vlastní číslo

$$\lambda_4 = 11 - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 11 - 3 + 4 - 5 = 7.$$

Cv. 7.6 Matice A má vlastní čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ a jim odpovídající vlastní vektory $x_1, \dots, x_n$. Dokažte, že pak platí:

(a) matice A^2 má vlastní čísla $\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2$ a vlastní vektory $x_1, \dots, x_n$,

(b) matice αA má vlastní čísla $\alpha\lambda_1, \dots, \alpha\lambda_n$ a vlastní vektory $x_1, \dots, x_n$,

(c) matice $A+\alpha I_n$ má vlastní čísla $\lambda_1+\alpha, \dots, \lambda_n+\alpha$ a vlastní vektory $x_1, \dots, x_n$,

(d) matice A^T má vlastní čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, ale vlastní vektory obecně jiné.

<u>Řešení</u>:

(a) Nechť λ_i je vlastní číslo matice A a x_i je jemu příslušný vlastní vektor. Pak podle definice vlastního čísla a vlastního vektoru platí $Ax_i = \lambda_i x_i$.
Chceme ukázat, že λ_i^2 je vlastní číslo matice $A^2 = AA$ s odpovídajícím vlastním vektorem x_i, tedy, že platí rovnost $A^2 x_i = \lambda_i^2 x_i$. S využitím vztahu $Ax_i = \lambda_i x_i$ dostáváme

$$A^2 x_i = (AA)x_i = A\ (Ax_i) = A\ (\lambda_i x_i) = \lambda_i (A\ x_i) = \lambda_i(\lambda_i x_i) = \lambda_i^2 x_i.$$

(b) Opět dle předpokladu platí $Ax_i = \lambda_i x_i$. Chceme dokázat, že matice αA má vlastní číslo $\alpha\lambda_i$ a příslušný vlastní vektor x_i, tedy $(\alpha A)x_i = (\alpha\lambda_i)x_i$. Platí:

$$(\alpha A)x_i = \alpha(A\ x_i) = \alpha(\lambda_i x_i) = (\alpha\lambda_i)x_i.$$

(c) Opět dle předpokladu platí $Ax_i = \lambda_i x_i$. Chceme dokázat, že pro matici $A+\alpha I_n$ platí rovnost $(A+\alpha I_n)x_i = (\lambda_i+\alpha)x_i$. Podobně jako v předchozích částech dostaneme:

$$(A\ + \alpha I_n)x_i = A\ x_i + (\alpha I_n)x_i = \lambda_i x_i + \alpha x_i = (\lambda_i + \alpha)x_i.$$

(d) Pro důkaz této části můžeme využít fakt, že vlastní čísla matice A jsou právě kořeny jejího charakteristického polynomu $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$. Z vlastností determinantu víme, že transpozice matice hodnotu determinantu nemění, tudíž platí

$$\det(A - \lambda I_n) = \det((A - \lambda I_n)^T) = \det(A^T - \lambda I_n).$$

Protože je ale zároveň $\det(A^T - \lambda I_n) = p_{A^T}(\lambda)$ charakteristický polynom matice A^T, má matice A^T stejná vlastní čísla jako matice A.

Vlastní vektory matice a její transpozice mohou být obecně různé, např. matice $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ má vlastní vektory ve tvaru $(\alpha, 0)^T$ pro $\alpha \in \mathbb{R} \setminus 0$, zatímco matice $A^T = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ má vlastní vektory ve tvaru $(0, \alpha)^T$ pro $\alpha \in \mathbb{R} \setminus 0$.

Cv. 7.7 Ukažte, že jeden vlastní vektor matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nemůže příslušet různým vlastním číslům.

Řešení:
Buď x vlastní vektor matice A. Pro spor předpokládejme, že x přísluší vlastním číslům λ_1, λ_2, přičemž $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Podle definice vlastního čísla a vlastního vektoru platí $Ax = \lambda_1 x$ a zároveň $Ax = \lambda_2 x$. Potom ale dostáváme $\lambda_1 x = \lambda_2 x$, neboli

$$\lambda_1 x - \lambda_2 x = (\lambda_1 - \lambda_2)x = 0.$$

To znamená, že platí $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$ nebo $x = 0$. Vlastní vektor x je z definice nenulový, musí proto platit $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$, a tedy $\lambda_1 = \lambda_2$, což je spor s předpokladem $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

8. Vlastní čísla – diagonalizovatelnost

Cv. 8.1 Určete, zda jsou následující matice diagonalizovatelné:

(a) $A_1 = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & -5 & 1 \end{pmatrix}$,

(b) $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Řešení:

(a) Aby vše fungovalo, musí být matice S regulární, tedy matice A_1 musí mít n lineárně nezávislých vlastních vektorů.
Spočtěme tedy vlastní čísla matice A_1. Charakteristický polynom matice A_1 je

$$p_{A_1}(\lambda) = (4-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda).$$

Vlastní čísla se tedy rovnají $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 2$ a $\lambda_3 = 1$. Příslušné vlastní vektory získáme vyřešením homogenní soustavy rovnic $(A_1 - \lambda I) = 0$, kde za λ dosadíme postupně konkrétní vlastní čísla. Vyjdou tedy vektory $x_1 = c \cdot (1,0,2)^T$, $x_2 = c \cdot (1,1,1)^T$ a $x_3 = c \cdot (0,0,1)^T$. Tyto vektory jsou lineárně nezávislé. Matice A_1 je tedy diagonalizovatelná a můžeme ji napsat ve tvaru SDS^{-1}, kde

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Postupujeme stejně jako u matice A_1 jen zde vyjdou komplexní vlastní čísla. Charakteristický polynom matice A_2 se rovná $p_{A_2}(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2$. Kořeny polynomu p_{A_2} jsou $1+i$ a $1-i$ a k nim příslušné vlastní vektory $(1, 1+i)^T$ a $(1, 1-i)^T$. Matici A_2 tedy můžeme naspat ve tvaru SDS^{-1} pro matice

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1+i & 1-i \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad D = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}.$$

Cv. 8.2 Ukažte, že matice B není diagonalizovatelná:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

Matice B má vlastní číslo 0 s algebraickou násobností 2. Pokud by tedy byla diagonalizovatelná, pak by musela být podobná nulové matici. Tedy pro nějako regulární matici S,

$$B = S0S^{-1} = 0.$$

Cv. 8.3 Pro diagonalizovatelnou matici C spočtěte třetí mocninu a druhou odmocninu. Odmocninou rozumějte takovou matici, jejíž druhá mocnina je daná matice.

$$C = \begin{pmatrix} -11 & 30 \\ -10 & 24 \end{pmatrix}$$

Řešení:
Mějme $C = SDS^{-1}$ pro diagonální matici D. Všimněme si, že

$$C^k = \left(SDS^{-1}\right)^k = SD^kS^{-1}.$$

Obdobně $SD^{\frac{1}{2}}S^{-1} \cdot SD^{\frac{1}{2}}S^{-1} = SDS^{-1}$, kde $D^{\frac{1}{2}}$ je diagonální matice, kde jsou na diagonále odmocniny diagonálních prvků matice D, tedy $D^{\frac{1}{2}}_{i,i} = \sqrt{D_{i,i}}$.

Třetí mocninu matice C tedy spočteme jako SD^3S^{-1} a odmocninu jako $SD^{\frac{1}{2}}S^{-1}$.

Nejprve musíme zkonstruovat rozklad matice do tvaru SDS^{-1}:

$$C = \begin{pmatrix} -11 & 30 \\ -10 & 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = SDS^{-1}.$$

Nyní již můžeme spočítat třetí mocninu a druhou odmocninu

$$SD^3S^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 729 & 0 \\ 0 & 64 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1931 & 3990 \\ -1330 & 2724 \end{pmatrix} = C^3,$$

$$SD^{\frac{1}{2}}S^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} = C^{\frac{1}{2}}.$$

Cv. 8.4 Rozložte následující matice na součin SDS^{-1}, kde matice S je regulární a matice D je diagonální:

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$,

(b) $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & -5 & 1 \end{pmatrix}$,

(c) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 5 \\ 2 & -4 & 8 \end{pmatrix}$,

(d) $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Řešení:

(a) $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $S^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$,

(b) $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

(c) $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$,

(d) $S = \begin{pmatrix} \frac{-1-i}{2} & \frac{-1+i}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} \frac{1+i}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-i}{2} \end{pmatrix}$, $S^{-1} = \begin{pmatrix} i & \frac{1+i}{2} \\ -i & \frac{1-i}{2} \end{pmatrix}$.

9. Vlastní čísla – Jordanova normální forma a symetrické matice

Cv. 9.1 Matici B převeďte do Jordanova normálního tvaru a určete vlastní vektory, popř. zobecněné vlastní vektory.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Řešení:

Ne všechny matice jsou diagonalizovatelné, například matice B. Všechny matice jsou ale podobné matici v Jordanově normálním tvaru. Ten si nyní pro matici B spočteme.

Hledáme tedy regulární matici S a matici v Jordanově normálním tvaru J takové, že $B = SJS^{-1}$. Začneme stejně, jako kdybychom chtěli ověřit, zda je matice diagonalizovatelná, tedy spočteme vlastní čísla a vlastní vektory. Charakteristický polynom vypadá:

$$p_B(\lambda) = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)^2.$$

Vlastní čísla jsou tedy $\lambda_1 = 2$ a $\lambda_2 = 1$. Jádro matice $(B - 2I)$ má dimenzi 1, konkrétně $\operatorname{Ker}(B - 2I) = \operatorname{span}\{(1, 0, 1)^T\}$. Vlastní číslo $\lambda = 2$ má algebraickou násobnost 2 (je dvojnásobným kořenem charakteristického polynomu), ale jeho geometrická násobnost je rovna 1 (přísluší mu pouze jeden vlastní vektor). Matice B tudíž nemá 3 lineárně nezávislé vlastní vektory.

Přistoupíme tedy k výpočtu zobecněných vlastních vektorů pro vlastní číslo λ_1. Spočteme $\operatorname{Ker}\left((B - 2I)^2\right) = \operatorname{span}\left\{(1, 0, 0)^T, (0, 0, 1)^T\right\}$. Nyní zvolíme zobecněný vlastní vektor x_2 z $\operatorname{Ker}((B - 2I)^2) \setminus \operatorname{Ker}(B - 2I)$, například $x_2 = (0, 0, 1)^T$. Dopočteme vlastní vektor x_1,

$$x_1 = (B - 2I)x_2 = (1, 0, 1)^T.$$

Soustava $(A - 1I)x = 0$ má řešení $\operatorname{span}\{(2, -1, 1)^T\}$. Získáváme hledanou matici S.

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Také vypočteme její inverzi S^{-1}

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matici B lze nyní zapsat pomocí Jordanova normálního tvaru např. jako

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = S\ JS^{-1}.$$

Cv. 9.2 Spočtěte druhou, třetí a 11. mocninu matice B z předchozího příkladu

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Řešení:

Využijeme Jordanova normálního tvaru spočteného v předchozím příkladě. Dostáváme $B^2 = (SJS^{-1})(SJS^{-1}) = SJ^2S^{-1}$. Obdobně $B^3 = SJ^3S^{-1}$. Chceme tedy spočítat druhou a třetí mocninu matice J.

Spočtěme J^2:

$$J^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Potom druhá mocnina B je rovna:

$$B^2 = S\ J^2S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 8 \end{pmatrix}.$$

Obdobně spočtěme J^3:

$$J^3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 12 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A třetí mocnina B je rovna:

$$B^3 = S\ J^3S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 12 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 12 \\ 0 & 1 & 0 \\ -12 & -5 & 20 \end{pmatrix}.$$

Všimněte si, že i mocnění matice v Jordanově normálním tvaru je jednodušší než pro obecné matice. Při mocnění nedochází ke změně mimo jednotlivé Jordanovy buňky (neboli nuly mimo Jordanovy buňky zůstávají zachovány).

Nakonec stejným způsobem spočteme 11. mocninu.

$$J^{11} = \begin{pmatrix} 2^{11} & 11 \cdot 2^{10} & 0 \\ 0 & 2^{11} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2048 & 11264 & 0 \\ 0 & 2048 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Odtud 11. mocnina B je rovna:

$$B^{11} = S\ J^{11} S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2048 & 11264 & 0 \\ 0 & 2048 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -9216 & -7170 & 11264 \\ 0 & 1 & 0 \\ -11264 & -9217 & 13312 \end{pmatrix}.$$

Cv. 9.3 Najděte matici A jejíž vlastní čísla jsou $\lambda_1 = 2$ a $\lambda_2 = 3$ a příslušné vlastní vektory jsou $x_1 = (1,2)^T$ a $x_2 = (2,5)^T$.

Řešení:
Jelikož jsou vlastní vektory nezávislé, víme, že A je diagonalizovatelná. Konkrétně A lze rozložit na součin SDS^{-1}, kde sloupce S jsou vlastní vektory a D má na diagonále vlastní čísla. Tedy dostáváme

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Spočteme inverzní matici k matici S:

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nyní můžeme dopočítat matici A:

$$A = SDS^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -10 & 7 \end{pmatrix}.$$

Cv. 9.4 Matici B převeďte do Jordanova normálního tvaru a určete vlastní, popř. zobecněné vlastní vektory.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ -4 & 13 & -3 \end{pmatrix}$$

Řešení:
Vlastnímu číslu $\lambda_1 = 0$ odpovídá vlastní vektor $(1,1,3)^T$ a dvojnásobnému vlastnímu číslu $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ odpovídá vlastní vektor $(-1,0,1)^T$ a zobecněný vlastní vektor $(3,1,0)^T$. Tudíž

$$B = SJS^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 9 & -2 \\ -1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Cv. 9.5 Spočtěte druhou, třetí, 100. a k-tou mocninu matice z předchozího příkladu.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ -4 & 13 & -3 \end{pmatrix}$$

Řešení:

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^2 = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -5 & 17 & -4 \end{pmatrix},$$

$$J^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^3 = \begin{pmatrix} 3 & -9 & 2 \\ -1 & 4 & -1 \\ -6 & 21 & -5 \end{pmatrix},$$

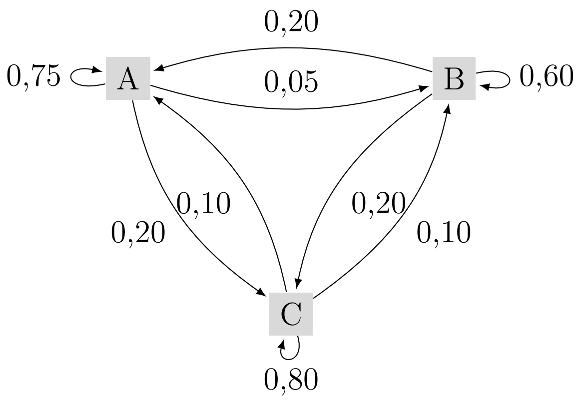
$$J^{100} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 100 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^{100} = \begin{pmatrix} 100 & -397 & 99 \\ -1 & 4 & -1 \\ -103 & 409 & -102 \end{pmatrix},$$

$$J^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^k = \begin{pmatrix} k & 3-4k & -1+k \\ -1 & 4 & -1 \\ -3-k & 9+4k & -2-k \end{pmatrix}.$$

10. Vlastní čísla – Markovovy řetězce a metody výpočtu

Cv. 10.1 Ve městě Matfyzákově fungují tři lokální politické strany, a to Anarchisté (A), Bláhoví (B) a Cílevědomí (C). Volby se řídí následujícím pravidlem: Z voličů strany A volí opět tuto stranu 75 % jejich voličů, ale k B přejde 5 % a k C dokonce 20 %. Z voličů B přejde k A rovných 20 % a k C také 20 %. Nakonec, z voličů C zůstane jen 80 %, zbytek se rovnoměrně rozdělí mezi A a B. Jaké bude rozdělení podpory stran v místním zastupitelstvu za delší časový horizont?

Řešení:
Pravidla pro volby v Matfyzákově ilustruje následující diagram:



Vrcholy grafu reprezentují stavy (volené politické strany) a hrany přechody mezi danými stavy, tedy přesuny voličů mezi těmito stranami. Pro výpočet výsledného rozdělení sestavíme přechodovou matici P, kde p_{ij} reprezentuje pravděpodobnost přechodu ze stavu j do stavu i:

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}75 & 0{,}20 & 0{,}10 \\ 0{,}05 & 0{,}60 & 0{,}10 \\ 0{,}20 & 0{,}20 & 0{,}80 \end{pmatrix}.$$

První sloupec matice P tedy reprezentuje pravděpodobnost přechodu ze stavu A do stavu A (75 % voličů opět volí stranu Anarchistů), do stavu B (5 % bude volit stranu Bláhových) a do stavu C (20 % volí Cílevědomé).

Pokud je počáteční rozložení sil dáno stavovým vektorem $x_0 \in \mathbb{R}^3$, vývoj situace v čase popisují stavy $x_0, Px_0, P^2x_0, \ldots, P^\infty x_0$, kde $P^\infty x_0$ označuje $\lim_{k\to\infty} P^k$ (pokud existuje).

Diagonalizací matice P dostaneme

$$P = S \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}55 \end{pmatrix} S^{-1}, \text{ kde } S = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -2 & -1 \\ \frac{1}{3} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

a tedy

$$P^\infty = S \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} S^{-1} = S_{*1} S_{1*}^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Limitní stav odpovídá vektoru $P^\infty x_0 = \frac{1}{6}(2e^T x_0, e^T x_0, 3e^T x_0)$, rozložení podpory stran se tedy ustálí v poměru $2 : 1 : 3$.

Jelikož je matice P kladná, výsledné rozložení odpovídá složkám vlastního vektoru $v = S_{*1}$, který přísluší vlastnímu číslu 1. Hledaný poměr tedy můžeme také přímo najít jako složky kladného vektoru $v \in \mathrm{Ker}(P - 1 \cdot I_3)$.

Cv. 10.2 Dokažte část Perronovy věty: Pro každé $A > 0$ víme, že $\rho(A)$ je vlastním číslem násobnosti 1 a přísluší mu kladný vlastní vektor (připomeňme, že $\rho(A)$ značí spektrální poloměr matice A, tedy $\max_i, |\lambda_i|$). Dokažte, že žádnému jinému vlastnímu číslu nepřísluší nezáporný vlastní vektor.

Řešení:

Označme $\lambda_1 = \rho(A)$ a nechť λ_2 je vlastní číslo matice A s odpovídajícím nezáporným vlastním vektorem $w \geq 0$. Matice A^T je zjevně také kladná a má stejná vlastní čísla, tudíž pro λ_1 můžeme najít příslušný kladný vlastní vektor $v > 0$ matice A^T.

Uvažujme výraz $v^T A w$; jelikož je w vlastním vektorem matice A s vlastním číslem λ_2, platí

$$v^T A\, w = v^T (A\, w) = v^T (\lambda_2 w) = \lambda_2 v^T w.$$

Zároveň je v vlastním vektorem matice A^T, který přísluší vlastnímu číslu λ_1. Platí tedy $A^T v = \lambda_1 v$, neboli $v^T A = \lambda_1 v^T$, z čehož dostáváme

$$v^T A\, w = (v^T A) w = (\lambda_1 v^T) w = \lambda_1 v^T w.$$

Odvodili jsme tedy vztah $\lambda_1 v^T w = \lambda_2 v^T w$. Z předpokladů $v > 0$, $w \geq 0$ (a $w \neq 0$, z definice vlastního vektoru) lze dále snadno nahlédnout, že platí $v^T w > 0$, a tedy $\lambda_1 = \lambda_2$.

Cv. 10.3 Určete Gerschgorinovy disky pro matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & -4 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

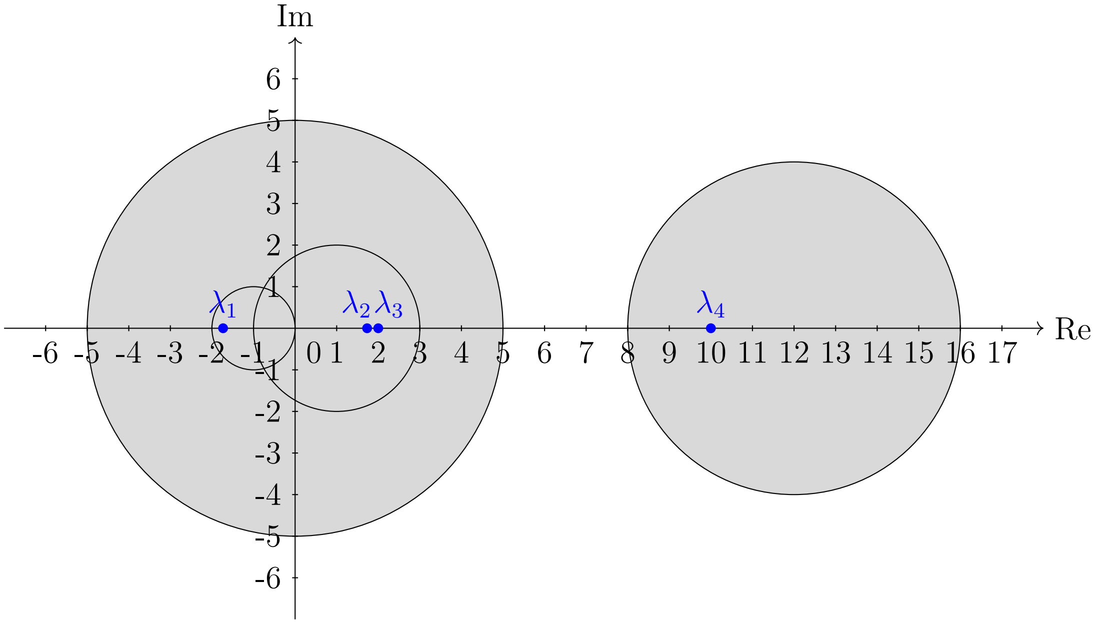
a pomocí nich rozhodněte, zda má matice A aspoň dvě reálná vlastní čísla.

Řešení:

Dle věty o Gerschgorinových discích víme, že každé vlastní číslo matice A leží v kruhu $B(c_i, r_i)$ o středu $c_i = a_{ii}$ a poloměru $r_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ pro nějaké $i \in$

$\{1, \ldots, 4\}$. Pro zadanou matici A dostáváme následující kruhy (viz také obrázek níže):

$$\begin{aligned} c_1 &= a_{11} = 1, & r_1 &= |a_{12}| + |a_{13}| + |a_{14}| = |0| + |-2| + |0| = 2, \\ c_2 &= a_{22} = 12, & r_2 &= |a_{21}| + |a_{23}| + |a_{24}| = |0| + |0| + |-4| = 4, \\ c_3 &= a_{33} = -1, & r_3 &= |a_{31}| + |a_{32}| + |a_{34}| = |-1| + |0| + |0| = 1, \\ c_4 &= a_{44} = 0, & r_4 &= |a_{41}| + |a_{42}| + |a_{43}| = |0| + |5| + |0| = 5. \end{aligned}$$



Navíc víme, že každá komponenta souvislosti obsahuje tolik vlastních čísel, z kolika kruhů daná komponenta vznikla. V kruhu $B(c_4, r_4) = B(0, 5)$ tedy leží 3 vlastní čísla $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ matice A a v kruhu $B(c_2, r_2) = B(12, 4)$ jedno vlastní číslo λ_4.

Komplexní vlastní čísla reálné matice můžeme spárovat do dvojic navzájem komplexně sdružených čísel, vlastní číslo λ_4 proto musí být reálné (jinak by v kruhu $B(12, 4)$ muselo ležet i vlastní číslo $\overline{\lambda_4}$). V kruhu $B(0, 5)$ leží 3 vlastní čísla, aspoň jedno z nich musí být také reálné. Nahlédli jsme tedy, že matice A má alespoň 2 reálná vlastní čísla. Výpočtem můžeme zjistit, že vlastní čísla matice A jsou $\lambda_1 = -\sqrt{3}$, $\lambda_2 = \sqrt{3}$, $\lambda_3 = 2$ a $\lambda_4 = 10$.

Cv. 10.4 Aplikujte větu o deflaci (největšího) vlastního čísla na matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení:
Výpočtem zjistíme, že matice A má vlastní čísla 6, 0 (dvojnásobné) a -2.

Největšímu vlastnímu číslu $\lambda_1 = 6$ odpovídá znormovaný vlastní vektor $v_1 = \frac{1}{2}(1,1,1,1)^T$. Deflací dostaneme matici

$$A' = A - \lambda_1 v_1 v_1^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} - 6 \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Matice A' má vlastní čísla 0 (trojnásobné) a -2 a stejné vlastní vektory jako matice A. Deflace tedy způsobila změnu vlastního čísla $\lambda_1 = 6$ na $\lambda_1' = 0$.

Cv. 10.5 Ukažte, že vlastnosti kladné matice z Perronovy věty obecně neplatí pro nezápornou matici. Konkrétně, najděte takovou matici $A \geq 0$, že platí postupně vlastnosti

(a) $\rho(A) = 0$,
(b) $\rho(A)$ je vícenásobné vlastní číslo,
(c) existuje vlastní číslo $\lambda \neq \rho(A)$ takové, že $|\lambda| = \rho(A)$.

Řešení:

(a) $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$,
(b) $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$,
(c) $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$

Cv. 10.6 Difuze léčebné látky mezi dvěma buňkami probíhá podle pravidla: 50 % látky z první buňky přejde do druhé, ale jen 25 % látky z druhé buňky přejde do první. V jakém poměru se množství látky ustálí?

Řešení:
Sestrojte přechodovou matici A pro přesun látky mezi buňkami a spočítejte vektor $A^\infty x_0$ reprezentující limitní stav (můžete využít fakt, že přechodová matice je kladná). Množství látky v buňkách se ustálí v poměru 1 : 2.

Cv. 10.7 Pomocí Gerschgorinových disků rozhodněte, zda je následující matice regulární:

$$\begin{pmatrix} 10 & -1 & 5 & 2 \\ 2 & -7 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Řešení:
Určíme Gerschgorinovy disky a zjistíme, zda matice může mít vlastní číslo $\lambda = 0$. Vlastní číslo $\lambda = 0$ nemůže ležet v žádném z disků, matice je proto regulární.

11. Positivně (semi-)definitní matice

Cv. 11.1 Otestujte positivní definitnost matice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

pomocí:

(a) rekuretního vzorce,

(b) Sylvestrova pravidla,

(c) Gaussovy eliminace.

Řešení:

(a) Rekurentní vzorec nám říká, že symetrická matice

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & a^T \\ a & \widetilde{A} \end{pmatrix}$$

je positivně definitní právě tehdy, když $\alpha > 0$ a matice $\widetilde{A} - \frac{1}{\alpha} a a^T$ positivně definitní. Aplikací dostáváme matici menší dimenze

$$\widetilde{A} - \frac{1}{\alpha} a a^T = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} (-2, 4) = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ -8 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Označme $B = \widetilde{A} - \frac{1}{\alpha} a a^T$ a aplikujme vzorec ještě jednou. Dostáváme $\widetilde{B} - \frac{1}{\beta} b b^T = 5 - \frac{1}{9} 3 \cdot 3^T = 4$. Pro matici v prostoru $\mathbb{R}^{1 \times 1}$ víme, že je positivně definitní právě tehdy, když je kladná, což zřejmě hodnota 4 splňuje.

(b) Stačí nám zkontrolovat, že determinanty všech hlavních vedoucích podmatic jsou kladné. To jsou matice, která vzniknout z matice A vyškrtnutím posledních $n-i$ řádků pro $i = 1, \ldots, n$. Musíme proto spočítat determinanty následujících matic, které odpovídají hlavním vedoucím podmaticím:

$$(4), \quad \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ -2 & 10 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Těm odpovídají popořadě kladné hodnoty $4, 36, 36$, tedy matice A je positivně definitní.

(c) Při provádění Gaussovy eliminace musíme mít na paměti, že máme povolenou pouze operaci přičítání α násobku řádku k řádku pod ním. Důvod najdeme v důkazu příslušného tvrzení, ze kterého je zřejmé, že využíváme vlastnosti rekurentního vzorce. Pokud nejprve odečteme příslušné násobky prvního řádku od ostatních a následně násobek druhého od třetího řádku, dostáváme matici

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 0 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}.$$

Ta má kladnou diagonálu, tedy se jedná o positivně definitní matici.

Cv. 11.2 Otestujte positivní semidefinitnost resp. positivní definitnost následujících matic pomocí vlastních čísel:

(a) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Řešení:

(a) Pro výpočet vlastních čísel využijeme vztahů $\lambda_1\lambda_2 = det(B)$ a $\lambda_1 + \lambda_2 = trace(B)$ z tvrzení 10.12. Dostáváme $\lambda_1\lambda_2 = 0$ a $\lambda_1 + \lambda_2 = 2$. Řešením je tedy dvojice $0, 2$. Podle věty 10.8 je matice B positivně semidefinitní.

(b) Stejným postupem jako v předchozí variantě dostáváme vlastní čísla $-1, 3$. Matice C je tedy tzv. indiferentní.

(c) Vlastní čísla jsou $3, 1$, tedy podle věty 11.7 je matice positivně definitní.

Cv. 11.3 Ukažte, že $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je symetrická positivně definitní právě tehdy, když zobrazení $\langle x, y\rangle_A := x^T Ay$ představuje skalární součin.

Řešení:
Ukážeme nejprve, že pro A symetrickou positivně definitní matici je zobrazení $\langle x, y\rangle_A := x^T Ay$ skalární součin:

- Positivní definitnost $\langle x, y\rangle_A$ dostáváme z positivní definitnosti A, protože $\langle x, y\rangle_A = x^T Ax \geq 0$ a rovnost nastává právě pro $x = 0$.
- Symetrii dostáváme taktéž ze symetrie A, platí totiž $\langle x, y\rangle_A = x^T Ay = y^T A^T x = y^T Ax = \langle x, y\rangle_A$. Druhá rovnost platí proto, že transpozice reálného čísla je rovna číslu samotnému (tj. $x^T Ax = (x^T Ax)^T$). Třetí rovnost platí právě díky symetrii matice A.
- Linearita plyne z faktu, že matice A a maticové násobení reprezentují lineární zobrazení, tedy

$$\langle x + y, z\rangle_A = (x + y)^T Az = x^T Az + y^T Az = \langle x, z\rangle_A + \langle y, z\rangle_A$$

a zároveň

$$\langle \alpha x, y\rangle_A = (\alpha x)^T Ay = \alpha(x^T Ay) = \alpha\langle x, y\rangle_A.$$

Při důkazu opačným směrem je třeba ukázat symetrii a positivní definitnost matice A:

- Protože je skalární součin symetrický, platí $x^T Ay = y^T Ax$. Protože výraz $x^T Ay$ je reálné číslo, aplikací transpozice dostáváme to samé číslo, tedy $x^T Ay = (x^T Ay)^T = y^T A^T x$. Kombinací obou rovností dostáváme, že $y^T A^T x = y^T Ax$ a tedy $A = A^T$.
- Positivní definitnost plyne z triviálně z vlastnosti $x^T Az = \langle x, z\rangle_A \geq 0$, kde rovnost nastane pro $x = 0$.

Cv. 11.4 Ukažte, že matice

$$F = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

je symetrická positivně definitní, a to pomocí tvrzení z předchozí úlohy.

Řešení:
Aby F byla positivně definitní, musí zobrazení $\langle x, y\rangle_F = x^T Fy$ být skalární součin. Roznásobme tedy výraz $x^T Fy$ pro obecné vektory $x = (x_1, x_2)^T$ a $y = (y_1, y_2)^T$. Dostáváme

$$x^T Fy = 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2.$$

- Positivní definitnost platí, protože

$$\begin{aligned}\langle x, x\rangle_F &= 2x_1^2 - x_1x_2 - x_2x_1 + 2x_2^2 = 2(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) \\ &= 2\big((x_1 - \tfrac{1}{2}x_2)^2 + \tfrac{3}{4}x_2^2\big) \geq 0.\end{aligned}$$

  Rovnost dostáváme, pokud $(x_1 - \frac{1}{2}x_2)^2 + \frac{3}{4}x_2^2 = 0$. Protože se jedná o součet dvou druhých mocnin, rovnost nastává právě tehdy, pokud jsou obě druhé mocniny nulové, tedy právě tehdy, když $(x_1 - \frac{1}{2}x_2)^2 = 0$ a $\frac{3}{4}x_2^2 = 0$. Z druhé rovnosti vychází $x_2 = 0$ a dosazením do první taktéž $x_1 = 0$.
- Symetrii zobrazení dostaneme snadno z prohození prostředních členů x_1y_2, x_2y_1 a komutativity násobení reálných čísel,

$$\langle x, y\rangle_F = 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2 = 2y_1x_1 - y_1x_2 - y_2x_1 + 2y_2x_2 = \langle y, x\rangle_F.$$

- Podobně ze základních pravidel operací nad reálnými čísly dostáváme linearitu součtu

$$\begin{aligned}\langle x + y, z\rangle_F &= 2(x_1 + y_1)z_1 - (x_1 + y_1)z_2 - (x_2 + y_2)z_1 + 2(x_2 + y_2)z_2 \\ &= (2x_1z_1 - x_1z_2 - x_2z_1 + 2x_2z_2) + (2y_1z_1 - y_1z_2 - y_2z_1 + 2y_2z_2) \\ &= \langle x, z\rangle_F + \langle y, z\rangle_F\end{aligned}$$

  i součinu

$$\begin{aligned}\langle \alpha x, y\rangle_F &= 2(\alpha x_1)y_1 - (\alpha x_1)y_2 - (\alpha x_2)y_1 + 2(\alpha x_2)y_2 \\ &= \alpha(2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2) = \alpha\langle x, y\rangle_F.\end{aligned}$$

  Ukázali jsme, že zobrazení $\langle x, y\rangle_F$ je skalární součin, tedy podle tvrzení z předchozí úlohy je F symetrická positivně definitní.

Cv. 11.5 Nad symetrickými maticemi z $\mathbb{R}^{n\times n}$ definujme relaci $\preccurlyeq$ předpisem $A \preccurlyeq B$ pokud $B - A$ je positivně semidefinitní. Ukažte, že $\preccurlyeq$ je relace částečného uspořádání.

Řešení:
Ukážeme postupně, že $\preccurlyeq$ splňuje reflexivitu, antisymetrii a tranzitivitu.

- Pro každou matici A je výraz $A \preccurlyeq A$ ekvivalentní tomu, že $A - A = 0_n$ je positivně semidefinitní. Pro každé $x \in \mathbb{R}^n$ je $x^T 0_n x = 0$, tedy 0_n je positivně semidefinitní a $\preccurlyeq$ je reflexivní.
- Pokud pro dvojici matic A, B platí, že $A \preccurlyeq B$ a zároveň $B \preccurlyeq A$, znamená to, že obě matice $B - A$ i $A - B$ jsou positivně semidefinitní matice. Tedy pro libovolný vektor x platí, že $x^T(B - A)x \geq 0$ a také $x^T(A - B)x \geq 0$, neboli $x^T Bx - x^T Ax \geq 0$ a $x^T Ax - x^T Bx \geq 0$. To můžeme upravit na $x^T Bx \geq x^T Ax$ a zároveň $x^T Ax \geq x^T Bx$, z čehož plyne, že $x^T Ax = x^T Bx$. Protože jsme zvolili libovolné x, platí to pro všechny vektory, čímž dostáváme rovnost $A = B$. Relace $\preccurlyeq$ je tedy antisymetrická.
- Mějme matice A, B, C takové, že $A \preccurlyeq B$ a $B \preccurlyeq C$. Tedy $M = B - A$ a $N = C - B$ jsou positivně semidefinitní matice. Všimněme si, že $M + N = (B - A) + (C - B) = C - A$. Pokud je tedy $M + N$ positivně semidefinitní, potom platí, že $A \preccurlyeq C$. Protože ale pro každé x platí $x^T Mx \geq 0$ a $x^T Nx \geq 0$, také $x^T(M + N)x = x^T Mx + x^T Nx \geq 0$. Relace $\preccurlyeq$ je tedy transitivní.

12. Positivně definitní matice – Choleského rozklad

Cv. 12.1 Otestujte positivní definitnost matice A pomocí Choleského rozkladu.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Řešení:

Pro každou positivně definitní matici existuje jediná dolní trojúhelníková matice $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ s kladnou diagonálou taková, že $A = LL^T$ (Choleského rozklad). K dokázání positivní definitnosti matice A nám tedy stačí nalézt takovou matici L.

Při konstrukci postupujeme stejně jako algoritmus ze skript. Protože je L dolní trojúhelníková, víme, že část prvků tvoří nuly.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bullet & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \bullet \end{pmatrix} = LL^T$$

Určíme nejprve prvek ℓ_{11}. Protože prvek a_{11} je dán maticovým násobením prvního řádku matice L s prvním sloupcem matice L^T (který odpovídá prvnímu řádku), můžeme zapsat $a_{11} = \ell_{11}^2 + \ell_{12}^2 + \ell_{13}^2$. Prvky ℓ_{12}, ℓ_{13} se nicméně rovnají nule, tedy platí $4 = a_{11} = \ell_{11}^2$ a proto $\ell_{11} = 2$ (fakticky máme dvě možnosti: 2 a -2, ale hodnotu 2 volíme proto, že L musí mít kladnou diagonálu).

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \bullet \end{pmatrix}$$

Všimněme si, že když budeme pokračovat v násobení prvního řádku L se zbylými sloupci L^T, kvůli nulám v prvním řádku dostáváme rovnici $a_{1k} = (L)_{11}(L^T)_{1k} = 2\ell_{k1}$. Díky té snadno určíme prvky v prvním sloupci L jako $\ell_{k1} = \frac{a_{1k}}{2}$.

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & \bullet & 0 \\ 2 & \bullet & \bullet \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \bullet \end{pmatrix}$$

Pokračujeme výpočtem ℓ_{22}. Podobně jako při určování předchozího diagonálního prvku, dostáváme vynásobením druhého řádku a druhého sloupce rovnici $10 = a_{22} = \ell_{21}^2 + \ell_{22}^2 + \ell_{23}^2 = (-1)^2 + \ell_{22}^2 + 0^2$. Po úpravě dostáváme $l_{22}^2 = 9$ a tedy $\ell_{22} = 3$ kvůli positivitě diagonály.

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & \bullet & \bullet \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & \bullet \\ 0 & 0 & \bullet \end{pmatrix}$$

Díky tomu, že druhý řádek matice L je kompletní, můžeme dopočítat podobně jako předtím i druhý sloupec L.

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & \bullet \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & \bullet \end{pmatrix}$$

Celý cyklus opakujeme ještě jednou pro třetí sloupec matice L. Nejprve spočítáme diagonální prvek $\ell_{33} = 1$ a poté i ostatní prvky v třetím sloupci (žádné už nejsou). Dostáváme rozklad

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = LL^T.$$

Matice A je tudíž positivně definitní.

Uvědomme si dále, že jsme v průběhu konstrukce nikdy neměli na vybranou, jaký prvek pro libovolné ℓ_{ij} zvolit. Jediná situace byla, když jsme určovali diagonální prvky, ale protože diagonála musí být kladná, měli jste stejně jen jedno řešení. Tedy matice L je skutečně dána jednoznačně.

Cv. 12.2 Nalezněte Choleského rozklad následujících matic, nebo zdůvodněte, že nejsou positivně semidefinitní.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 13 & 2 \\ 2 & 2 & 21 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ I_n & 5I_n \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení:
Matice A a B jsou positivně definitní a jejich Choleského rozklad je

$$A = L_A L_A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$B = L_B L_B^T \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ I_n & 2I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0 & 2I_n \end{pmatrix}.$$

Matice C naopak není positivně definitní.

Cv. 12.3 Pomocí Choleského rozkladu invertujte matici

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení:
Protože je matice E positivně definitní, lze rozložit do tvaru $E = LL^T$. Pro její inverzi tedy platí $E^{-1} = (LL^T)^{-1} = L^{-T}L^{-1}$. Místo počítání inverze přímo tedy můžeme spočítat nejprve Choleského rozklad, následně inverzi dolní trojúhelníkové matice L a na závěr vzniklou inverzi L^{-1} vynásobíme s její transpozicí.

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Takovýto postup může být někdy výpočetně méně náročný, než počítat inverzi matice E přímo.

Cv. 12.4 Spočtěte Choleského rozklad matice A a použijte ho k řešení soustavy $Ax = b$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -6 & 3 & 2 \\ -3 & -6 & 10 & -5 & -3 \\ 2 & 3 & -5 & 15 & 11 \\ 1 & 2 & -3 & 11 & 14 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 10 \\ 21 \\ -32 \\ 26 \\ 23 \end{pmatrix}.$$

Řešení:
Matice U pro hledaný rozklad $A = U^T U$ je

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Zavedeme substituci $Ux = y$. Tedy $b = Ax = U^T Ux = U^T y$. Soustava $U^T y = b$ má řešení $y = (10, 1, -2, 3, 2)^T$. Nyní již můžeme vyřešit soustavu $Ux = y$ a zjistíme, že výsledné řešení je $x = (1, 1, -2, 0, 1)^T$.

Protože matice obou soustav jsou v odstupňovaném tvaru, stačí provést jen dvakrát zpětnou substituci.

Cv. 12.5 Pomocí Choleského rozkladu vyřešte soustavu $Ax = b$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & 0 \\ -2 & 13 & -13 & 9 \\ 5 & -13 & 42 & -11 \\ 0 & 9 & -11 & 14 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -3 \\ 15 \\ -10 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Řešení:
Choleského rozklad matice je $A = LL^T$, kde

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Podobným postupem jako v předchozím příkladu vyřešíme soustavu a dostaneme řešení $x = (1, 2, 0, -1)^T$.

Cv. 12.6 Ukažte, že libovolná mocnina positivně semidefinitní matice je positivně semidefinitní matice.

Řešení:
První způsob:
Pro sudé mocniny: $x^T A^k x = x^T A^{\frac{k}{2}} I A^{\frac{k}{2}} x = y^T I y \geq 0$.
Pro liché mocniny: $x^T A^k x = x^T A^{\frac{k-1}{2}} A A^{\frac{k-1}{2}} x = y^T A y \geq 0$.

Druhý způsob: Protože matice A je positivně semidefinitní, má nezáporná vlastní čísla $\lambda_1, \dots \lambda_n$. Matice A^k má vlastní čísla jejich k-té mocniny $\lambda_1^k, \dots \lambda_n^k$, které jsou taky nezáporné. Tudíž A^k je positivně semidefinitní.

Cv. 12.7 Buď A positivně semidefinitní. Ukažte, že $x^T A x = 0$ pro nějaké $x \neq 0$ implikuje $Ax = 0$.

Řešení:
Matice A má (symetrickou) positivně semidefinitní odmocninu B, tj. $A = B^2$. Můžete tedy psát $x^T A x = x^T B^T B x = y^T y$ pro $Bx = y$. Z předpokladu je $y^T y = 0$, z čehož $y = 0$ a $Bx = 0$. Pokud obě strany vynásobíme maticí B, dostaneme $Ax = B^2 x = 0$.

13. Bilineární a kvadratické formy

Cv. 13.1 Jsou následující zobrazení bilineární formou? Pokud ano, jde o symetrickou formu?

(a) $a\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definované $a(x,y) = x_1y_2 + x_2y_1$,

(b) $b\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definované $b(x,y) = x_1y_2 + x_2$,

(c) $c\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definované $c(x,y) = x_1^2 + y_1^2 + 2x_2y_1$,

(d) $d\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definované $d(x,y) = x_1y_1 + x_1y_2 + 2x_2y_2$,

(e) $e\colon \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ definované $e(A,B) = AB$.

Řešení:

(a) Bilineární formu můžeme otestovat dvěma způsoby. První možností je otestovat vlastnosti přímo z definice. Aby bylo zobrazení a bilineární, musí platit linearita v obou složkách. Jednoduchými algebraickými úpravami dostáváme linearitu v první složce,

$$\begin{aligned} a(\alpha u + \beta v, w) &= (\alpha u_1 + \beta v_1)w_2 + (\alpha u_2 + \beta v_2)w_1 \\ &= \alpha(u_1w_2 + u_2w_1) + \beta(v_1w_2 + v_2w_1) \\ &= \alpha a(u,w) + \beta a(v,w), \end{aligned}$$

stejně jako linearitu v druhé složce,

$$\begin{aligned} a(w, \alpha u + \beta v) &= w_1(\alpha u_2 + \beta v_2) + w_2(\alpha u_1 + \beta v_1) \\ &= \alpha(w_1u_2 + w_2u_1) + \beta(w_1v_2 + w_2v_1) \\ &= \alpha a(w,u) + \beta a(w,v). \end{aligned}$$

Zobrazení a je tedy bilineární forma. To, že je a navíc symetrická dostáváme opět rozepsáním, prohozením členů sčítání a násobení,

$$a(u,v) = u_1v_2 + u_2v_1 = v_1u_2 + v_2u_1 = a(v,u).$$

Druhá možnost. Zobrazení a je bilineární forma právě tehdy, když se dá vyjádřit maticově ve formě $a(x,y) = [x]_B^T A\,[y]_B$, kde A je matice bilineární formy vůči bází B. Vezmeme-li za B kanonickou bázi, dostáváme

$$a(x,y) = x^TAy = a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2.$$

V našem případě, kdy $a(x,y) = x_1y_2 + x_2y_1$ dokážeme koeficienty matice A určit snadno, $a_{11} = a_{22} = 0$ a $a_{12} = a_{21} = 1$, tedy

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matice je navíc symetrická, tedy i bilineární forma je symetrická.

(b) Linearita v první složce platí. Podíváme-li se na linearitu v druhé složce, dostáváme výraz

$$b(w, \alpha u + \beta v) = w_1(\alpha u_2 + \beta v_2) + w_2 = \alpha w_1 u_2 + \beta w_1 v_2 + w_2,$$

který se nerovná $\alpha b(w,u) + \beta b(w,v)$. Forma b tedy není bilineární.

(c) Pokusme se nalézt matici C reprezentující bilineární formu c vůči kanonické bázi. Pro tu musí platit, že

$$x^T C y = c_{11}x_1y_1 + c_{12}x_1y_2 + c_{21}x_2y_1 + c_{22}x_2y_2 = c(x,y) = x_1^2 + y_1^2 + 2x_2y_1.$$

Snadno vidíme, že daná rovnice nemá pro neznámé koeficienty c_{ij} žádné řešení, forma c tedy není bilineární.

(d) Určíme maticovou reprezentaci, je tedy třeba vyřešit rovnici

$$x^T D y = \mathbf{d_{11}}x_1y_1 + \mathbf{d_{12}}x_1y_2 + \mathbf{d_{21}}x_2y_1 + \mathbf{d_{22}}x_2y_2 = \mathbf{1}x_1y_1 + \mathbf{1}x_1y_2 + \mathbf{2}x_2y_2.$$

Vyřešením rovnice dostáváme matici

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

která není symetrická. Zobrazení d je tedy bilineární forma, která není symetrická.

(e) V tomto případě musíme postupovat pouze z definice. Linearita v první složce

$$e(\alpha U + \beta V, W) = (\alpha U + \beta V)W = \alpha UW + \beta VW = \alpha e(U,W) + \beta e(V,W)$$

platí díky linearitě maticového násobení. Obdobně tomu je i s linearitou v druhé složce.

Aby platila symetrie, musela by platit komutativita maticového násobení, tedy $e(X,Y) = XY = YX = e(Y,X)$. To víme, že obecně neplatí, tedy zobrazení e je bilineární forma, která není symetrická.

Cv. 13.2 Pro následující kvadratickou formu

$$f(x) = 3x_1^2 + 5x_1x_2 + 5x_2^2$$

nalezněte symetrickou bilineární formu $b(x,y)$, která ji indukuje a uveďte $b(x,y)$ v maticové reprezentaci.

Řešení:

Chceme nalézt symetrickou bilineární formu

$$b(x,y) = b_{11}x_1y_1 + b_{12}x_1y_2 + b_{21}x_2y_1 + b_{22}x_2y_2$$

takovou, že $b(x,x) = f(x)$. Ze symetrie musí nutně $b_{12} = b_{21}$. Kombinací obou podmínek dostáváme

$$\begin{aligned} b(x,x) &= b_{11}x_1^2 + b_{12}x_1x_2 + b_{12}x_2x_1 + b_{22}x_2^2 \\ &= \mathbf{b_{11}}x_1^2 + \mathbf{2b_{12}}x_1x_2 + \mathbf{b_{22}}x_2^2 = \mathbf{3}x_1^2 + \mathbf{5}x_1x_2 + \mathbf{5}x_2^2. \end{aligned}$$

Snadno vidíme, že $b_{11} = 3$, $b_{12} = b_{21} = 2{,}5$ a $b_{22} = 5$. V maticové reprezentaci tedy máme

$$b(x,y) = x^T B y = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2.5 \\ 2.5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Cv. 13.3 Buď $b\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kvadratická forma a B její maticová reprezentace. Potom *hodnost* kvadratické formy b definujeme jako $\operatorname{rank}(b) := \operatorname{rank}(B)$. Dokažte, že $\operatorname{rank}(b)$ nezávisí na volbě maticové reprezentace.

Řešení:
Různé maticové reprezentace odpovídají různým bázím, v jejichž souřadnicích pracujeme. Tedy pokud A_1 a A_2 jsou maticové reprezentace formy b vůči bázím B_1 a B_2, potom platí

$$b(x,y) = [x]_{B_1}^T A_1 [y]_{B_1} = [x]_{B_2}^T A_2 [y]_{B_2}.$$

Dále víme, že matice A_1 a A_2 jsou svázány vztahem takzvané *kongruence*, který udává přechod mezi reprezentacemi $A_1 = S^T A_2 S$. Matice S je zde maticí přechodu $S = {}_{B_2}[id]_{B_1}$.

Uvažujme tedy dvě maticové reprezentace A_1 a A_2 formy b. Protože matice přechodu S i S^T jsou regulární, zachovává se při maticovém násobení hodnost. Platí proto, že

$$\operatorname{rank}(A_2) = \operatorname{rank}(S^T A_2 S) = \operatorname{rank}(A_1),$$

tedy nutně dvě maticové reprezentace stejné kvadratické formy mají stejnou hodnost. Proto $\operatorname{rank}(b)$ je dobře definovaná ve smyslu, že není závislá na volbě maticové reprezentace.

Cv. 13.4 Buď $b\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ symetrická bilineární forma a $g(x) = b(x,x)$ indukovaná kvadratická forma. Ukažte, jak určit hodnotu $b(x,y)$ pouze prostřednictvím hodnot funkce g.

Řešení:
Díky vlastnostem bilinearity můžeme nejprve *sloučit informaci* o vektorech x a y, tedy vzít $x+y$, a následným aplikováním g na $x+y$ dostáváme

$$g(x+y) = b(x+y, x+y) = b(x,x) + b(x,y) + b(y,x) + b(y,y).$$

Nyní odečteme *dílčí informace* o jednotlivých vektorech, tedy $g(x) = b(x,x)$ a $g(y) = b(y,y)$ a dostáváme,

$$g(x,y) - g(x,x) - g(y,y) = b(x,y) + b(y,x) = 2b(x,y).$$

Algebraickou úpravou dostáváme výsledné vyjádření

$$b(x,y) = \frac{1}{2}\big(g(x,y) - g(x,x) - g(y,y)\big).$$

Všimněme si, že nebýt symetrie, tak náš postup selže, neboť linearita nebude dostatečně silná na to, abychom rozlišili $b(x,y)$ a $b(y,x)$.

14. Kvadratické formy a Sylvestrův zákon setrvačnosti

Cv. 14.1 Určete signaturu formy dané maticí

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Řešení:
Matici diagonalizujeme prováděním řádkových a sloupcových úprav (po provedení jedné řádkové úpravy provedeme vždy identickou sloupcovou úpravu).

První úprava v následujícím postupu je odečtení prvního řádku od druhého, po kterém následuje odečtení prvního sloupce od druhého. Dále přičteme dvojnásobek prvního řádku (sloupce) ke třetímu a nakonec dvojnásobek druhého řádku (sloupce) ke třetímu.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Výsledná matice je v diagonálním tvaru s dvěma kladnými a jedním záporným prvkem na diagonále, její signatura je tedy $(2, 1, 0)$.

Cv. 14.2 Kvadratická forma má (vzhledem ke kanonické bázi) vyjádření

$$g((w, x, y, z)^T) = 2w^2 + 2wx - x^2 - 2xz - z^2.$$

Určete její signaturu.

Řešení:
Z analytického vyjádření formy sestavíme její matici (vzhledem ke kanonické bázi).

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Na tuto matici aplikujeme postup s řádkovými a sloupcovými úpravami a převedeme ji na diagonální tvar.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(Pozor, úprava na druhém řádku je odečtení čtvrtého řádku a sloupce od druhého.)

Výsledná signatura formy je $(1, 2, 1)$.

Cv. 14.3 V závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$ určete signaturu formy s maticí B a s maticí C

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & a & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Řešení:

Nyní již řádkovou a odpovídající sloupcovou úpravu provedeme najednou.

Pro matici B:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & a-1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Pro matici C:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & a & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & a-4 & -6 \\ 3 & -6 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a-4 & -6 \\ 0 & -6 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a-4 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Signatury obou forem jsou tedy stejné a závisí na znaménku parametru a (závislost je triviální, přesný výsledek zde nevypisujeme).

Cv. 14.4 Rozhodnete, zda je reálná kvadratická forma

$$g((x, y, z)^T) = x^2 + 2xy + 2xz + 2y^2 + 5z^2$$

positivně definitní.

Řešení:

Symetrická matice této formy vzhledem ke kanonické bázi je

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Forma je positivně definitní právě tehdy, když její matice je positivně definitní. To ověříme Sylvestrovým kritériem:

$$\begin{aligned}\det(A_1) &= 1,\\ \det(A_2) &= 1,\\ \det(A_3) &= 4\end{aligned}$$

Všechny determinanty jsou kladné, matice je positivně definitní a tedy i daná kvadratická forma.

Cv. 14.5 Mějme dánu reálnou kvadratickou formu

$$g((x,y,z)^T) = x^2 + 2xy + 2xy + 2y^2 + 2ayz + 5z^2.$$

Pro které hodnoty parametru $a \in \mathbb{R}$ je tato forma positivně definitní a pro které hodnoty je negativně definitní?

Řešení:

Matice formy se od předchozí liší jen nepatrně,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & a & 5 \end{pmatrix}.$$

Pro ověření positivní definitnosti vyjdou první dva determinanty stejně jako v předchozím příkladu, stačí tedy vypočítat pouze

$$\det(A_3) = -a^2 + 2a + 3 = -(a-3)(a+1).$$

Jeho hodnota bude kladná pro $a \in (-1,3)$, takže matice A, resp. kvadratická forma g, je positivně definitní právě tehdy, když a leží v intervalu $(-1,3)$.

Kvadratická forma g nemůže být negativně definitní pro žádné $a \in \mathbb{R}$, neboť $g((1,0,0)^T) = 1 > 0$ nezávisle na volbě parametru a.

Cv. 14.6 Najděte polární bázi reálné kvadratické formy $g((x,y,z)^T) = 2xz - 2xy$ a určete její signaturu.

Řešení:

Postup je podobný jako při diagonalizaci matice kvadratické formy, jenom je nutné „pamatovat“ si použité úpravy. Převádíme-li A na diagonální matici $S^T AS$ pomocí řádkových a sloupcových úprav, pak matice S^T je vlastně součin matic provedených elementárních úprav a matice S je součinem (stejných) sloupcových úprav.

Je-li na začátku výpočtu matice A maticí kvadratické formy vzhledem ke kanonické bázi, pak dle věty o matici kvadratické formy při změně báze je výsledná $S^T AS$ maticí stejné formy vůči bázi B pro kterou je $S = {}_{\text{kan}}[id]_B$ a tedy B je báze tvořená sloupci matice S. Polární báze je taková, vůči níž je matice kvadratické formy diagonální, tedy máme-li převod A na diagonální tvar $S^T AS$, pak sloupce matice S tvoří hledanou polární bázi.

Proto, abychom S spočítali, stačí postupně aplikovat sloupcové úpravy použité při diagonalizaci A na jednotkovou matici (na A aplikujeme řádkové i sloupcové úpravy, ale pomocí S si „pamatujeme“ jenom ty sloupcové, řádkové jsou reprezentovány maticí S^T, ale tu počítat nemusíme).

Konkrétně pro danou kvadratickou formu $g((x,y,z)^T) = 2xz - 2xy$ určíme její matici (vzhledem ke kanonické bázi)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a tu diagonalizujeme spolu s jednotkovou maticí, na kterou ale aplikujeme jenom sloupcové úpravy.

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

(přičetli jsme třetí řádek a sloupec k prvnímu, na pravé straně jenom sloupec)

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

(přičetli jsme třetí řádek a sloupec k druhému)

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1 & 1 & 1/2 \end{array}\right)$$

(odečteme polovinu prvního řádku a sloupce od posledního)

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1 & 1 & 1/2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

(spíše z estetických důvodů nakonec vynásobíme poslední řádek a sloupec dvěma, prvek na pozici $(3,3)$ se tak vynásobí 4).

Polární báze je tvořena sloupci matice S (pravá strana ve výpočtu), to jest vektory

$$(1,0,1)^T,\ (0,1,1)^T,\ (-1,0,1)^T$$

a signatura formy je $(1,1,1)$.

Cv. 14.7 Najděte polární bázi kvadratické formy $g((x,y,z)^T) = 2x^2 + 3xy + xz + 4y^2 + yz$ na vektorovém prostoru $\mathbb{Z}_5^3$.

<u>Řešení:</u>

Postup je shodný s postupem v předchozím příkladu, pouze ho provádíme nad tělesem $\mathbb{Z}_5$.

Matice dané kvadratické formy (vzhledem ke kanonické bázi) je

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nyní diagonalizujeme pomocí řádkových a sloupcových úprav a na pravé straně provádíme pouze sloupcové úpravy.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 3 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Z výsledné matice určíme polární bázi

$$(1,0,0)^T,\ (3,1,0)^T,\ (0,3,1)^T.$$