Příklady na procvičení

z

Lineární algebry 2
(LS 2020/2021)

8. března 2021

zpracovali:

Martin Černý, Pavel Dvořák, Elif Garajová,
Milan Hladík, Veronika Slívová

Obsah

1. Skalární součin, norma

Cv. 1.1 Rozhodněte, zda následující zobrazení představují skalární součin na prostoru $\mathbb{R}^2$:

(a) $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2$,

(b) $\langle x, y\rangle = -x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 4x_2y_2$,

(c) $\langle x, y\rangle = x_1y_2 + x_2y_1 + 4x_2y_2$,

(d) $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 5x_2y_2$.

Cv. 1.2 Pythagorova věta.

(a) Nad $\mathbb{R}$ dokažte: $x \perp y$ právě tehdy když $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

(b) Najděte protipříklad nad $\mathbb{C}$, kdy předchozí ekvivalence neplatí, tj. x, y nejsou kolmé a přesto $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Cv. 1.3 Připomeňme, že stopa matice je definována jako součet prvků na diagonále:

$$\mathrm{trace}(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

(a) Ukažte, že $\langle A, B\rangle = \mathrm{trace}(A^TB)$ definuje skalární součin na prostoru $\mathbb{R}^{m\times n}$.

(b) Zformulujete Cauchyho–Schwarzovu nerovnost.

(c) Dokažte $\mathrm{trace}(A)^2 \le n \cdot \mathrm{trace}(A^TA)$.

Cv. 1.4 Dokažte, že pro každé $a_1, \dots, a_n > 0$ platí:

$$n^2 \le (a_1 + \dots + a_n)(a_1^{-1} + \dots + a_n^{-1}).$$

Cv. 1.5 Ověřte, že $\|x\| = |x_1 - 2x_2| + |3x_1 - 4x_2| + |5x_1 - 6x_2|$ je normou na prostoru $\mathbb{R}^2$.

Cv. 1.6 Buď $\|\cdot\|$ libovolná reálná norma na prostoru $\mathbb{R}^n$ a buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulární matice. Dokažte, že $\|x\|_A := \|Ax\|$ je také norma.

Cv. 1.7 Dokažte ekvivalenci norem

$$\begin{aligned}\|x\|_1 &= \textstyle\sum_{i=1}^n |x_i|,\\ \|x\|_2 &= \textstyle\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2},\\ \|x\|_\infty &= \max_{i=1,\dots,n} |x_i|\end{aligned}$$

na prostoru $\mathbb{R}^n$. Konkrétně ukažte, že platí následující vztahy:

$$\begin{aligned}\|x\|_\infty \le \|x\|_1 &\le n\|x\|_\infty,\\ \|x\|_\infty \le \|x\|_2 &\le \sqrt{n}\|x\|_\infty,\\ \|x\|_2 \le \|x\|_1 &\le \sqrt{n}\|x\|_2.\end{aligned}$$

Cv. 1.8 Nechť máme vektory $u_1 \dots u_n, v_1, \dots v_k \in \mathbb{R}^m$ a matice A resp. B, které vypadají následovně:

$$A = \begin{pmatrix} — & u_1 & — \\ — & u_2 & — \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ — & u_n & — \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} | & | & \dots & | \\ v_1 & v_2 & \dots & v_k \\ | & | & \dots & | \end{pmatrix}.$$

Jaký vztah má maticové násobení AB a skalarní součiny jednotlivých vekotrů u_i, v_j, kde $i \in [n]$ a $j \in [k]$.

2. Ortonormální systém a Gramova–Schmidtova ortogonalizace

Cv. 2.1 Určete koeficienty lineární kombinace vektoru $(3,2,1)^T$ vůči ortonormální bázi $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)^T$, $(0,0,1)^T$.

Určete matice přechodu ${}_K[id]_B$ a ${}_B[id]_K$.

Cv. 2.2 V prostoru $\mathbb{R}^4$ se standardním skalárním součinem $\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^4 x_i y_i$ nalezněte pomocí Gramovy–Schmidtovy ortogonalizace ortonormální bázi $Z = \{z_1,\dots,z_r\}$ řádkového prostoru následující matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Cv. 2.3 Rozšiřte ortonormální bázi z předchozího příkladu na ortonormální bázi $\mathbb{R}^4$.

Cv. 2.4 Co se stane, když Gramova–Schmidtova ortogonalizace

(a) dostane na vstup lineárně závislé vektory?

(b) dostane na vstup ortogonální vektory?

(c) dostane na vstup ortonormální vektory?

(d) dostane na vstup $-x_i$ namísto x_i? Jak se změní výstup?

Cv. 2.5 Nad $\mathbb{C}^3$ ortogonalizujte $x_1 = (i,i,i)^T$, $x_2 = (0,i,i)^T$, $x_3 = (0,0,i)^T$.

Cv. 2.6 Zortonormalizujete bázi podprostoru $\mathbb{R}^3$ popsaného rovnicí $x - y + z = 0$.

Cv. 2.7 Určete vzdálenost bodu $A = [5,5,3,3]$ od roviny procházející počátkem a body $B = [8,-1,1,-2]$ a $C = [4,-2,2,-1]$.

3. Ortogonální doplněk a projekce

Cv. 3.1 Pro podprostor V prostoru $\mathbb{R}^4$ určete $V^\perp, \{0\}^\perp, \{\}^\perp$.

Cv. 3.2 Najděte podprostor $U \Subset \mathbb{R}^5$ takový, že $\dim U = \dim U^\perp$.

Cv. 3.3 Spočítejte ortogonální doplněk vektoru $u = (1,0,0,-2)^T$ do prostoru $V = \operatorname{span}\{v,w\} = \operatorname{span}\{(1,2,4,0)^T,(0,1,2,1)^T\}$.

Cv. 3.4 Určete ortogonální projekci p vektoru $a = (2,2,1,5)^T$ do podprostoru generovaného ortonormálními vektory

$$Z = \left\{ (\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})^T,\ (\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2})^T,\ (-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})^T \right\}.$$

Dále určete souřadnice této projekce $[p]_Z$ vzhledem k bázi Z.

Cv. 3.5 Pomocí projekce najděte nejlepší přibližné řešení x' soustavy $Ax = b$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = (10,5,13,9)^T.$$

Všimněte si, že sloupce matice A jsou vzájemně kolmé.

Určete také velikost chyby $\|Ax' - b\|$.

Dostanete stejná řešení jako řešení soustavy $A^TAx = A^Tb$?

Cv. 3.6 Hookův zákon vyjadřuje lineární úměrnost pružné deformace materiálu na použité síle. Následující tabulka obsahuje hodnoty průtahu pružiny (v palcích) v závislosti na síle/hmotnosti (v librách). Odhadněte koeficient úměrnosti.

síla F	5	7	8	10	12
průtah ℓ	11,1	15,4	17,5	22	26,3

Cv. 3.7 Rakovinné buňky se množí exponenciálně rychle v čase. Určete konkrétní vztah ve tvaru $y = ce^{dt}$ při následujících datech.

t čas	1	2	3	4	5
y (počet buněk)	16	27	45	74	122

4. Ortogonální matice

Cv. 4.1 Buď $H(u) = I_n - \frac{2}{u^T u} u u^T$, $u \neq o$, Householderova matice.

(a) Dokažte, že $H(u)$ je symetrická.

(b) Dokažte, že $H(u)$ je ortogonální.

(c) Rozhodněte, zda I_n je Householderovou maticí pro určité $u \neq o$.

Cv. 4.2 Které z matic elementárních úprav jsou ortogonální?

Cv. 4.3 Buď $p \in S_n$ permutace a $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ permutační matice definovaná tak, že $P_{ij} = 1$ pokud $i = p(j)$ a nula jinak.

(a) Jakou úpravu na matici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ vykoná operace PA?

(b) Nahlédněte, že P vznikne z jednotkové matice zpermutováním jejích řádků podle p.

(c) Dokažte, že P je ortogonální matice.

(d) Nechť Q je permutační matice odpovídající permutaci q. Jaká matice odpovídá permutaci $p \circ q$?

(e) Dokažte, že P^T odpovídá permutaci p^{-1}.

(f) Jakou úpravu na matici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ vykoná operace AP?

Cv. 4.4 Rozhodněte o platnosti výroků:

(a) Má-li regulární matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ navzájem kolmé řádky, pak má i navzájem kolmé sloupce.

(b) Má-li matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ navzájem kolmé řádky velikosti 1, pak má i navzájem kolmé sloupce.

5. Determinanty – výpočet

Cv. 5.1 Nechť $\pi = (1,5,3)(2,6)(4,8,7,9)$ a $\sigma = (1,2,7)(3,5)(4,9,6)(8)$ jsou dvě permutace z S_9. Spočtěte:

(a) složení $\pi \circ \sigma$ a složení $\sigma \circ \pi$,

(b) inverzní permutace π^{-1} a σ^{-1}.

Cv. 5.2 Jaké znaménko mají dané permutace?

(a) permutace $\pi(1) = 2,\ \pi(2) = 3,\ \pi(3) = 1$,

(b) permutace $\sigma(1) = 2,\ \sigma(2) = 3,\ \sigma(3) = 4,\ \sigma(4) = 1,\ \sigma(5) = 7,\ \sigma(6) = 5,\ \sigma(7) = 6$,

(c) identická permutace $id \in S_n$, pro kterou $id(i) = i$ pro každé $i \in \{1, \ldots, n\}$,

(d) transpozice (permutace, která zamění přesně dva prvky, třeba $\tau(1) = 2,\ \tau(2) = 1,\ \tau(n) = n$ pro všechny $n > 2$).

Cv. 5.3 Nechť $\pi = (1,3)(2,9,7,6)(4)(5,8)$ a $\sigma = (1,4,5)(3,6,9,8,7)(2)$. Určete:

(a) znaménka $\operatorname{sgn}(\pi)$ a $\operatorname{sgn}(\sigma)$,

(b) znaménka $\operatorname{sgn}(\pi \circ \sigma)$ a $\operatorname{sgn}(\sigma \circ \pi)$,

(c) znaménka $\operatorname{sgn}(\pi^{-1})$ a $\operatorname{sgn}(\sigma^{-1})$.

Cv. 5.4 Spočítejte determinanty následujících reálných matic. Použijte výpočet z definice, pomocí Laplaceova rozvoje podle řádku a pomocí Gaussovy eliminace.

(a) $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

(c) $\mathrm{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(d) $\mathrm{D} = \begin{pmatrix} 18 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 24 \end{pmatrix}$

Cv. 5.5 Spočtěte determinant následujících matic:

(a) $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots & n \\ -1 & 0 & 2 & 3 & 4 & \ldots & n-1 \\ -1 & -2 & 0 & 3 & 4 & \ldots & n-1 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 4 & \ldots & n-1 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & 0 & \ldots & n-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \\ -1 & -2 & -3 & -4 & \ldots & 1-n & 0 \end{pmatrix},$$

(b) $$B = \begin{pmatrix} a_1 + x & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 + x & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 + x & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n + x \end{pmatrix}.$$

6. Determinanty – použití

Cv. 6.1 Geometrickou interpretací determinantu je objem. Přesněji absolutní hodnota determinantu určuje, jak moc lineární zobrazení $x \mapsto Ax$ určené maticí A zvětšuje/zmenšuje velikost objektů[1]. Tedy pokud máme matice 2×2, absolutní hodnota jejich determinantu představuje kolikrát se zvětší obsah rovinného geometrického útvaru (například jednotkového čtverce) po provedené transformaci. Absolutní hodnota determinantu matice velikosti 3×3, pak udává kolikrát se zvětší objem geometrického 3 dimenzionálního útvaru (například krychle) provedením lineární transformace dané příslušnou maticí.

Zároveň lze na determinant nahlížet jako na obsah rovnoběžnostěnu daného sloupci matice. Pokud příslušnou lineární transformaci provedeme na čtverec jehož strany jsou dány vektory $(1,0)^T$ a $(0,1)^T$ – čtverec reprezentovaný I_2, bude tento čtverec zobrazen na rovnoběžnostěn daný sloupci matice.

Za cvičení spočtěte následující determinanty a ověřte si intuici pro následující matice:

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

(b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

(c) $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$,

(d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

(e) $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

(f) $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Cv. 6.2 Pomocí adjungované matice najděte matici inverzní (pokud existuje) k následující matici nad tělesem reálných čísel i nad tělesem $\mathbb{Z}_5$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cv. 6.3 Rozhodněte, pro které hodnoty parametru $a \in \mathbb{R}$ je následující matice regulární:

$$A = \begin{pmatrix} 2a & 3 & -1 \\ 5-a & -1 & -2 \\ 2+3a & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

[1]Doporučujeme zhlédnout 10-minutové video o determinantech z kanálu „Three blue, one brown“, viz `https://www.youtube.com/watch?v=Ip3X9LOh2dk`

Cv. 6.4 Řešte následující soustavu rovnic pomocí Cramerova pravidla.

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 7 \\ -1 & 1 & -2 & -6 \\ 3 & -1 & 3 & 10 \end{array} \right).$$

7. Vlastní čísla – základy

Cv. 7.1 Vlastní vektor matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ reprezentuje směr, který se při lineárním zobrazení $f(x) = Ax$ zobrazí opět na ten samý směr (mění se tedy pouze velikost nebo orientace vektoru). Pro vlastní vektor v matice A tedy platí, že přímka $\operatorname{span}\{v\}$ se při zobrazení f zobrazí do sebe sama. Příslušné vlastní číslo matice pak představuje škálování v tomto invariantním směru.

Následující matice reprezentují geometrická zobrazení v rovině. Nalezněte jejich vlastní čísla a k nim příslušné vlastní vektory a pokuste se je geometricky vysvětlit:

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$,

(b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

(c) $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$,

(d) $D = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Cv. 7.2 Určete charakteristický polynom a nalezněte vlastní čísla a odpovídající vlastní vektory následujících matic nad tělesem $\mathbb{C}$. Jsou vlastní vektory jednoznačné?

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$,

(b) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$,

(c) $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Cv. 7.3 Určete charakteristický polynom a nalezněte vlastní čísla matice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 0 & 7 & -3 \end{pmatrix}.$$

Cv. 7.4 Najděte nad tělesem $\mathbb{Z}_5$ všechna vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Cv. 7.5 Známe tři vlastní čísla matice

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 7 & -7 \\ 4 & 5 & 2 & -2 \\ 16 & 4 & 15 & -8 \\ 30 & 4 & 26 & -19 \end{pmatrix},$$

a to $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -4$ a $\lambda_3 = 5$. Dopočítejte zbylé vlastní číslo.

Cv. 7.6 Matice A má vlastní čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ a jim odpovídající vlastní vektory $x_1, \dots, x_n$. Dokažte, že pak platí:

(a) matice A^2 má vlastní čísla $\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2$ a vlastní vektory $x_1, \dots, x_n$,

(b) matice αA má vlastní čísla $\alpha\lambda_1, \dots, \alpha\lambda_n$ a vlastní vektory $x_1, \dots, x_n$,

(c) matice $A+\alpha I_n$ má vlastní čísla $\lambda_1+\alpha, \dots, \lambda_n+\alpha$ a vlastní vektory $x_1, \dots, x_n$,

(d) matice A^T má vlastní čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, ale vlastní vektory obecně jiné.

Cv. 7.7 Ukažte, že jeden vlastní vektor matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nemůže příslušet různým vlastním číslům.

8. Vlastní čísla – diagonalizovatelnost

Cv. 8.1 Určete, zda jsou následující matice diagonalizovatelné:

(a) $A_1 = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & -5 & 1 \end{pmatrix}$,

(b) $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Cv. 8.2 Ukažte, že matice B není diagonalizovatelná:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cv. 8.3 Pro diagonalizovatelnou matici C spočtěte třetí mocninu a druhou odmocninu. Odmocninou rozumějte takovou matici, jejíž druhá mocnina je daná matice.

$$C = \begin{pmatrix} -11 & 30 \\ -10 & 24 \end{pmatrix}$$

Cv. 8.4 Rozložte následující matice na součin SDS^{-1}, kde matice S je regulární a matice D je diagonální:

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$,

(b) $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & -5 & 1 \end{pmatrix}$,

(c) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 5 \\ 2 & -4 & 8 \end{pmatrix}$,

(d) $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

9. Vlastní čísla – Jordanova normální forma a symetrické matice

Cv. 9.1 Matici B převeďte do Jordanova normálního tvaru a určete vlastní vektory, popř. zobecněné vlastní vektory.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Cv. 9.2 Spočtěte druhou, třetí a 11. mocninu matice B z předchozího příkladu

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Cv. 9.3 Najděte matici A jejíž vlastní čísla jsou $\lambda_1 = 2$ a $\lambda_2 = 3$ a příslušné vlastní vektory jsou $x_1 = (1, 2)^T$ a $x_2 = (2, 5)^T$.

Cv. 9.4 Matici B převeďte do Jordanova normálního tvaru a určete vlastní, popř. zobecněné vlastní vektory.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ -4 & 13 & -3 \end{pmatrix}$$

Cv. 9.5 Spočtěte druhou, třetí, 100. a k-tou mocninu matice z předchozího příkladu.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ -4 & 13 & -3 \end{pmatrix}$$

10. Vlastní čísla – Markovovy řetězce a metody výpočtu

Cv. 10.1 Ve městě Matfyzákově fungují tři lokální politické strany, a to Anarchisté (A), Bláhoví (B) a Cílevědomí (C). Volby se řídí následujícím pravidlem: Z voličů strany A volí opět tuto stranu 75 % jejich voličů, ale k B přejde 5 % a k C dokonce 20 %. Z voličů B přejde k A rovných 20 % a k C také 20 %. Nakonec, z voličů C zůstane jen 80 %, zbytek se rovnoměrně rozdělí mezi A a B. Jaké bude rozdělení podpory stran v místním zastupitelstvu za delší časový horizont?

Cv. 10.2 Dokažte část Perronovy věty: Pro každé $A > 0$ víme, že $\rho(A)$ je vlastním číslem násobnosti 1 a přísluší mu kladný vlastní vektor (připomeňme, že $\rho(A)$ značí spektrální poloměr matice A, tedy $\max_i, |\lambda_i|$). Dokažte, že žádnému jinému vlastnímu číslu nepřísluší nezáporný vlastní vektor.

Cv. 10.3 Určete Gerschgorinovy disky pro matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & -4 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a pomocí nich rozhodněte, zda má matice A aspoň dvě reálná vlastní čísla.

Cv. 10.4 Aplikujte větu o deflaci (největšího) vlastního čísla na matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cv. 10.5 Ukažte, že vlastnosti kladné matice z Perronovy věty obecně neplatí pro nezápornou matici. Konkrétně, najděte takovou matici $A \geq 0$, že platí postupně vlastnosti

(a) $\rho(A) = 0$,

(b) $\rho(A)$ je vícenásobné vlastní číslo,

(c) existuje vlastní číslo $\lambda \neq \rho(A)$ takové, že $|\lambda| = \rho(A)$.

Cv. 10.6 Difuze léčebné látky mezi dvěma buňkami probíhá podle pravidla: 50 % látky z první buňky přejde do druhé, ale jen 25 % látky z druhé buňky přejde do první. V jakém poměru se množství látky ustálí?

Cv. 10.7 Pomocí Gerschgorinových disků rozhodněte, zda je následující matice regulární:

$$\begin{pmatrix} 10 & -1 & 5 & 2 \\ 2 & -7 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

11. Positivně (semi-)definitní matice

Cv. 11.1 Otestujte positivní definitnost matice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

pomocí:

(a) rekuretního vzorce,

(b) Sylvestrova pravidla,

(c) Gaussovy eliminace.

Cv. 11.2 Otestujte positivní semidefinitnost resp. positivní definitnost následujících matic pomocí vlastních čísel:

(a) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Cv. 11.3 Ukažte, že $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je symetrická positivně definitní právě tehdy, když zobrazení $\langle x, y \rangle_A := x^T A y$ představuje skalární součin.

Cv. 11.4 Ukažte, že matice

$$F = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

je symetrická positivně definitní, a to pomocí tvrzení z předchozí úlohy.

Cv. 11.5 Nad symetrickými maticemi z $\mathbb{R}^{n \times n}$ definujme relaci $\preccurlyeq$ předpisem $A \preccurlyeq B$ pokud $B - A$ je positivně semidefinitní. Ukažte, že $\preccurlyeq$ je relace částečného uspořádání.

12. Positivně definitní matice – Choleského rozklad

Cv. 12.1 Otestujte positivní definitnost matice A pomocí Choleského rozkladu.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Cv. 12.2 Nalezněte Choleského rozklad následujících matic, nebo zdůvodněte, že nejsou positivně semidefinitní.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 13 & 2 \\ 2 & 2 & 21 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ I_n & 5I_n \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Cv. 12.3 Pomocí Choleského rozkladu invertujte matici

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Cv. 12.4 Spočtěte Choleského rozklad matice A a použijte ho k řešení soustavy $Ax = b$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -6 & 3 & 2 \\ -3 & -6 & 10 & -5 & -3 \\ 2 & 3 & -5 & 15 & 11 \\ 1 & 2 & -3 & 11 & 14 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 10 \\ 21 \\ -32 \\ 26 \\ 23 \end{pmatrix}.$$

Cv. 12.5 Pomocí Choleského rozkladu vyřešte soustavu $Ax = b$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & 0 \\ -2 & 13 & -13 & 9 \\ 5 & -13 & 42 & -11 \\ 0 & 9 & -11 & 14 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -3 \\ 15 \\ -10 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Cv. 12.6 Ukažte, že libovolná mocnina positivně semidefinitní matice je positivně semidefinitní matice.

Cv. 12.7 Buď A positivně semidefinitní. Ukažte, že $x^T Ax = 0$ pro nějaké $x \neq 0$ implikuje $Ax = 0$.

13. Bilineární a kvadratické formy

Cv. 13.1 Jsou následující zobrazení bilineární formou? Pokud ano, jde o symetrickou formu?

(a) $a\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definované $a(x, y) = x_1 y_2 + x_2 y_1$,

(b) $b\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definované $b(x, y) = x_1 y_2 + x_2$,

(c) $c\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definované $c(x, y) = x_1^2 + y_1^2 + 2x_2 y_1$,

(d) $d\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definované $d(x, y) = x_1 y_1 + x_1 y_2 + 2x_2 y_2$,

(e) $e\colon \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ definované $e(A, B) = AB$.

Cv. 13.2 Pro následující kvadratickou formu

$$f(x) = 3x_1^2 + 5x_1 x_2 + 5x_2^2$$

nalezněte symetrickou bilineární formu $b(x, y)$, která ji indukuje a uveďte $b(x, y)$ v maticové reprezentaci.

Cv. 13.3 Buď $b\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kvadratická forma a B její maticová reprezentace. Potom *hodnost* kvadratické formy b definujeme jako $\operatorname{rank}(b) := \operatorname{rank}(B)$. Dokažte, že $\operatorname{rank}(b)$ nezávisí na volbě maticové reprezentace.

Cv. 13.4 Buď $b\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ symetrická bilineární forma a $g(x) = b(x, x)$ indukovaná kvadratická forma. Ukažte, jak určit hodnotu $b(x, y)$ pouze prostřednictvím hodnot funkce g.

14. Kvadratické formy a Sylvestrův zákon setrvačnosti

Cv. 14.1 Určete signaturu formy dané maticí

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Cv. 14.2 Kvadratická forma má (vzhledem ke kanonické bázi) vyjádření

$$g((w, x, y, z)^T) = 2w^2 + 2wx - x^2 - 2xz - z^2.$$

Určete její signaturu.

Cv. 14.3 V závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$ určete signaturu formy s maticí B a s maticí C

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & a & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cv. 14.4 Rozhodnete, zda je reálná kvadratická forma

$$g((x, y, z)^T) = x^2 + 2xy + 2xz + 2y^2 + 5z^2$$

positivně definitní.

Cv. 14.5 Mějme dánu reálnou kvadratickou formu

$$g((x, y, z)^T) = x^2 + 2xy + 2xy + 2y^2 + 2ayz + 5z^2.$$

Pro které hodnoty parametru $a \in \mathbb{R}$ je tato forma positivně definitní a pro které hodnoty je negativně definitní?

Cv. 14.6 Najděte polární bázi reálné kvadratické formy $g((x, y, z)^T) = 2xz - 2xy$ a určete její signaturu.

Cv. 14.7 Najděte polární bázi kvadratické formy $g((x, y, z)^T) = 2x^2 + 3xy + xz + 4y^2 + yz$ na vektorovém prostoru $\mathbb{Z}_5^3$.