Domácí úkoly

z

Lineární algebry 2
(LS 2020/2021)

7. června 2021

zpracovali:

Martin Černý, Pavel Dvořák, Elif Garajová,
Milan Hladík, Veronika Slívová

Obsah

1. Skalární součin, norma [10 bodů]

Dcv. 1.1 Nechť

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ukažte, že $\langle x, y\rangle = x^T Ay$ je skalární součin.

Určete normu vektoru $u = (2, 2, 2)^T$ pro normu indukovanou vektorovým součinem $\langle x, y\rangle = x^T Ay$.

Nalezněte všechny vektory, které jsou vzhledem k tomuto součinu kolmé na vektor $v = (1, 3, 5)^T$.

[6 bodů: 4 za ověření, 1 za normu, 1 za kolmé vektory]

Dcv. 1.2 Buď $a \in \mathbb{R}^n$. Určete maximální hodnotu lineární funkce $f(x) = a^T x$ na jednotkovém kruhu $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_p \leq 1\}$ pro p-normy postupně s $p \in \{1, 2, \infty\}$.

[4 bodů: $p \in \{1, \infty\}$ po bodu, $p = 2$ za 2 body]

2. Ortonormální systém a Gramova–Schmidtova ortogonalizace [8 bodů]

Dcv. 2.1 Buď $x_1 = (1,0,1)^T$ a $x_2 = (2,1,1)^T$:

(a) ortogonalizujte vektory x_1, x_2,

(b) ortogonalizujte vektory v opačném pořadí,

(c) najděte projekci vektoru $x = (0,1,1)^T$ do podprostoru $U = \operatorname{span}\{x_1, x_2\}$. Jaká je vzdálenost x od U?

[5 bodů: 3 body za obě ortogonalizace, 1 bod za projekci, 1 bod za vzdálenost]

Dcv. 2.2 Najděte (libovolnou) ortonormální bázi řádkového prostoru následující matice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[1 bod]

Dcv. 2.3 Pro skalární součin $\langle x, y \rangle \coloneqq x_1y_1 + 2x_1y_2 + 5x_2y_2 + 2x_2y_1 + x_3y_3$ zortogonalizujte vektory $(1,0,1)^T$, $(1,1,1)^T$.

[2 body]

3. Ortogonální doplněk a projekce [8 bodů]

Dcv. 3.1 Najděte ortogonální doplněk k prostorům

(a) $U = \text{span}\{(1, 2, -1, 2)^T, (2, 3, 1, 2)^T\}$.

(b) $V = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 + 3x_2 - 1x_3 = 0\}$,

[2 body]

Dcv. 3.2 Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a uvažujte dvě zobrazení $f\colon x \to Ax$, $g\colon y \to A^T y$. Dokažte nebo vyvraťte následující tvrzení: $\forall U \Subset \mathbb{R}^n$ platí $f(U) \subseteq U \implies g(U^\perp) \subseteq U^\perp$.

[3 body]

Dcv. 3.3 Najděte matici projekce do

(a) $U = \text{span}\{(2, -2, 1, 4)^T\}$.

(b) do roviny souřadných os x_1, x_2 v prostoru $\mathbb{R}^n$.

[2 body]

Dcv. 3.4 Buď P matice projekce do $U \subset \mathbb{R}^n$ a Q matice projekce do $V \Subset U^\perp$. Ukažte, že $PQ = 0$.

[1 bod]

4. Ortogonální matice [6 bodů]

Dcv. 4.1 Ukažte, že matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonální právě tehdy, když $\|Ax\| = \|x\|$ pro všechna $x \in \mathbb{R}^n$ (při eukleidovské normě).

[3 body: 1 bod za lehčí implikaci, 2 body za těžší implikaci]

Dcv. 4.2 Dokažte nebo vyvraťte následující tvrzení: Pro každou $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ platí:

(a) A je symetrická a ortogonální pak $A^2 = I$,

(b) $A^2 = I$ pak A je symetrická a ortogonální.

[3 body: 1 bod za první trvzení, 2 body za druhé tvrzení]

5. Determinanty – výpočet [9 bodů]

Dcv. 5.1 Spočítejte determinanty:

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & 0 & e & f \\ 0 & g & 0 & 0 \\ h & i & 0 & 0 \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -1 & 0 \\ x & x & \dots & x & x & x \\ y & y & \dots & y & y & 2y \end{vmatrix}$

[5 bodů: První dvě matice za 1 bod, poslední za 3 body]

Dcv. 5.2 Rozhodněte zda platí a dokažte nebo vyvraťte následující tvrzení

(a) $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$

(b) $\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det(A)\det(C)$

[4 bodů: 1.5 bodu za první, 2.5 bodu za druhý]

6. Determinanty – použití [4 body]

Dcv. 6.1 Vyřešte Cramerovým pravidlem následující soustavu dvou rovnic v $\mathbb{Z}_5$:

$$\begin{aligned} 2x + y &= 2, \\ 1x + 4y &= 4. \end{aligned}$$

[2 body]

Dcv. 6.2 Pomocí adjungované matice určete matici inverzní k matici

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

[2 body]

7. Vlastní čísla – základy [11 bodů]

Dcv. 7.1 Určete charakteristický polynom, spočítejte vlastní čísla a odpovídající vlastní vektory následujících matic:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

[4 body: Vlastní čísla po bodu, vlastní vektory také po bodu]

Dcv. 7.2 Najděte $a \in \mathbb{R}$ tak, aby $\lambda = 3$ bylo jedno z vlastních čísel matice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

[3 body]

Dcv. 7.3 Najděte nejmenší číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ takové, že matice $A+\beta I_n$ je regulární pro všechna $\beta > \alpha$.

[2 body]

Dcv. 7.4 Matice $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ má vlastní čísla $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1$, a $\lambda_3 = 3$. Určete stopu a determinant matice $((-A^{-1} + 2I_3)^T)^3$.

[2 body]

8. Vlastní čísla – diagonalizovatelnost [10 bodů]

Dcv. 8.1 Převeďte následující matice do tvaru SDS^{-1}, kde D je diagonální a S je regulární.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 4 & -6 & 3 \end{pmatrix}.$$

[3 body: 1 za matici D, 1 za matici S a jeden za inverzi S a zkoušku]

V následujících příkladech relace $\sim$ značí podobnost matic.

Dcv. 8.2 Rozhodněte o platnosti následujících implikací:

(a) $A \sim B \implies A^2 \sim B^2$,

(b) $A^2 \sim B^2 \implies A \sim B$.

[4 body: 1.5 bod za první, 2.5 body za druhou]

Dcv. 8.3 Buďte $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ podobné. Ukažte, že maticová soustava $AX - XB = 0$ má řešení $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$, kde X je regulární.

[3 body]

9. Vlastní čísla – Jordanova normální forma a symetrické matice [12 bodů]

Dcv. 9.1 Určete 155. mocninu následující matice a její Jordanovu normální formu.

$$A = \begin{pmatrix} -7 & -3 & 3 \\ 14 & 6 & -5 \\ -4 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

[4 body]

Dcv. 9.2 Ukažte, že rozklad B $= Q\Lambda Q^T$, kde Λ je diagonální a Q ortogonální, existuje pouze pro symetrické matice.

[2 body]

Dcv. 9.3 Najděte matici řádu 3, která má právě dva vlastní vektory $v = (2,2,1)^T$ a $w = (1,0,2)^T$.

[2 body]

Dcv. 9.4 Matice C je antisymetrická pokud $C^T = -C$. Dokažte

(a) Vlastní čísla antisymetrické matice jsou ryze imaginární.

(b) Pokud je matice D antisymetrická, pak $I + D$ je regulární (kde I je jednotková matice).

[4 body]

10. Vlastní čísla – Markovovy řetězce a metody výpočtu [6 bodů]

Dcv. 10.1 Počasí v Matfyzákově se řídí následujícími pravidly: Každý den je buď slunečno, nebo deštivo. Pravděpodobnost, že slunečný den bude následován dalším slunečným dnem, je 80%. Pravděpodobnost, že deštivý den bude následován dalším deštivým dnem je 40%.

S využitím Markovových řetězců a souvisejících metod lineární algebry vyřešte násedující otázky:

(a) Jaká je pravděpodobnost, že pozítří bude slunečno, pokud dnes bylo deštivo?

(b) Jaké je limitní rozložení pravděpodonosti za delší časový horizont?

[4 body: 2 body za každou podčást a/b]

Dcv. 10.2 Určete Gerschgorinovy disky pro matici

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -2 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

a rozhodněte, zda má matice A aspoň jedno reálné záporné vlastní číslo.

[2 body]

11. Positivně (semi-)definitní matice [7 bodů]

Dcv. 11.1 U následujících matic určete zda jsou positivně (semi-)definitní.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -4 \\ -1 & -4 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 4 \\ 7 & 5 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 9 & -6 & 6 \\ -6 & 20 & -12 \\ 6 & -12 & 9 \end{pmatrix}.$$

[3 body: 0.5 bodu za každou matici, 0.5 za každý typ testování, který bude použit]

Dcv. 11.2 Určete, zda je následující matice řádu n positivní definitní

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \dots & 0 & \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

[2 body]

Dcv. 11.3 Určete všechny matice $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ takové, že D i $-D$ jsou positivně semidefinitní.

[1 bod]

Dcv. 11.4 Buď E positivně semidefinitní a $e_{ii} = 0$ pro jisté i. Ukažte, že i-tý řádek a i-tý sloupec matice E jsou nulové.

[1 bod]

12. Positivně definitní matice – Choleského rozklad [4 body]

Dcv. 12.1 Spočtěte Choleského rozklad matice A a použijte ho k řešení soustavy $Ax = b$ pro vektor $b = (35, -5, -11)^T$.

$$A = \begin{pmatrix} 49 & -14 & -28 \\ -14 & 5 & 14 \\ -28 & 14 & 53 \end{pmatrix}$$

[2 body]

Dcv. 12.2 Pomocí Choleského rozkladu invertujte matici

$$B = \begin{pmatrix} 9 & -12 & 9 \\ -12 & 20 & -8 \\ 9 & -8 & 17 \end{pmatrix}.$$

[2 body]

13. Bilineární formy [7 bodů]

Dcv. 13.1 Zdůvodněte, proč jsou následující formy bilineární a nalezněte jejich maticovou reprezentaci:

(a) násobení reálných čísel,

(b) $a\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ danou $a(x,y) = x_1y_1 + 2x_2y_1 + 3x_2y_2$,

(c) $b\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ danou $b(x,y) = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} ix_i\right) \cdot \left(\sum\limits_{j=1}^{n} jy_j\right)$

[3 body: 1 bod za každou formu]

Dcv. 13.2 Buď $\mathbb{R}^{n\times n}$ vektorový prostor reálných matic dimenze $n \times n$. Definujme formu $d\colon \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ předpisem $d(A,B) = \operatorname{trace}(A^TB)$, kde $\operatorname{trace}(C) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii}$ je stopa matice. Ukažte, že d je bilineární forma. Je d symetrická?

[2 body]

Dcv. 13.3 Nechť f je bilineární forma a dále A její maticová reprezentace vůči nějaké bázi B. Dokažte, nebo vyvraťte, že vlastní čísla matice A jsou nezávislá na volbě báze B.

[2 body]

14. Kvadratické formy [3 bodů]

Dcv. 14.1 Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ mějte kvadratickou formu

$$g(x, y, z) = 2x^2 - 2xy + 4xz + y^2 + 2z^2.$$

Najděte polární bázi formy g a určete její signaturu.

[2 body]

Dcv. 14.2 Najděte libovolnou pozitivně definitní kvadratickou formu, která má stejnou polární bázi jako forma g.

[1 bod]