1. Určete, zda následující jsou lineární zobrazení:
   (a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kde $f(x) = 0$
   (b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kde $f(x) = x$
   (c) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kde $f(x) = -2x$
   (d) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kde $f(x) = 1$
   (e) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kde $f(x) = x^2$
   (f) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, kde $f((x,y)^T) = (x+y, x-y)^T$
   (g) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, kde $f((x,y)^T) = (x-y, x-y)^T$
   (h) Nechť $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, definujme zobrazení $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ následovně $f(v) = Av$.

2. Dokažte, že lineární zobrazení je plně určeno tím, kam zobrazíme bázové vektory. Tedy pokud máme zadáno $f(b_i) = b'_i$ pro $b_1, \ldots, b_n$ bázi umíme jednoznačně určit $f(v)$ pro libovolný vektor v.

3. Nechť je zobrazení $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dané:

$$f\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$$
$$f\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

(a) Určete matici zobrazení f vůči kanonické bázi $K = \left\{(1,0)^T, (0,1)^T\right\}$:

(b) Určete obraz $f((6,5)^T)$.

(c) Mějme zobrazení $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dané: $g(x,y) = (x-y, 2y-2x)^T$, sestrojte matici zobrazení g vůči kanonické bázi.

(d) Sestrojte matici zobrazení $h = f \circ g$, tedy $h(v) = f(g(v))$.

4. Určete matice lineárních zobrazení v rovině.
    - identita

- symetrie podle osy y

- symetrie podle osy x

- zvětšení

- rotace okolo počátku souřadnic

- zvětšení podle osy x

- zkosení

- projekce na osu x

- symetrie podle obecné osy

5. Pracujeme nad $\mathbb{Z}_5^3$. Pro báze A, B dané sloupci matic $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(a) Určete matici přechodu od souřadnic báze A ke kanonické bázi.

(b) Určete matici přechodu od souřadnic kanonické báze k souřadnicím báze B.

(c) Určete matici přechodu od souřadnic báze A k souřadnicím báze B.

6. Určete matici lineárního zobrazení $f\colon \mathbb{Z}_5^3 \to \mathbb{Z}_5^2$, o kterém víte: $f\left((1,2,3)^T\right) = (1,2)^T$ $f\left((3,2,1)^T\right) = (2,1)^T$ $f\left((4,4,3)^T\right) = (0,2)^T$

   - Je toto zobrazení prosté?
   - Pokud není prosté, najděte kolizi (tj. dva různé vektory takové, že $f(x_1) = f(x_2)$).
   - Je na?

7. Odvoďte součtové vzorce pro $\sin(\alpha + \beta)$ a $\cos(\alpha + \beta)$ pomocí matic zobrazení.

8. Dokažte, že derivace polynomu je lineární zobrazení. Napište matici derivace pro prostor reálných polynomů stupně nejvýš pět. Jak určíte matici druhé derivace?