1. Určete, zda následující jsou lineární zobrazení:

   (a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kde $f(x) = 0$

   Řešení: Zobrazení $f\colon U \to V$ je lineární zobrazení, pokud U, V jsou vektorové prostory nad tím samým tělesem $\mathbb{T}$ a platí:

      i. $\forall u_1, u_2 \in U\colon f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2)$

      ii. $\forall u \in U, \forall \alpha \in \mathbb{R}\colon f(\alpha u) = \alpha f(u)$

   Ověříme dle definice. Ano.

   (b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kde $f(x) = x$

   Řešení: Ano.

   (c) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kde $f(x) = -2x$

   Řešení: Ano.

   (d) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kde $f(x) = 1$

   Řešení: Ne, neboť například: $1 = f(3 \cdot 4) \neq 3f(4) = 3 \cdot 1 = 3$. Dokonce ani první podmínka neplatí: $1 = f(1 + 2) \neq f(1) + f(2) = 1 + 1 = 2$.

   (e) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kde $f(x) = x^2$

   Řešení: Ne, například $4 = f(2 \cdot 1) \neq 2f(1) = 2$.

   (f) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, kde $f((x, y)^T) = (x + y, x - y)^T$

   Řešení: Ano.

   (g) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, kde $f((x, y)^T) = (x - y, x - y)^T$

   Řešení: Ano.

   (h) Nechť $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, definujme zobrazení $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ následovně $f(v) = Av$.

   Řešení: Ano (použijeme co známe o násobení matic). O matici A říkáme, že reprezentuje zobrazení f vůči kanonické bázi – je to matice zobrazení f vůči kanonické bázi:

$$_K[f]_K = A$$

2. Dokažte, že lineární zobrazení je plně určeno tím, kam zobrazíme bázové vektory. Tedy pokud máme zadáno $f(b_i) = b'_i$ pro $b_1, \ldots, b_n$ bázi umíme jednoznačně určit $f(v)$ pro libovolný vektor v.

   Řešení: Postupně rozepíšeme podle definice lineárního zobrazení. Tedy pokud máme bázi $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ a vektor se souřadnicemi $[v]_B = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, tedy

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

   pak můžeme psát:

$$\begin{aligned} f(v) &= f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right) && \text{(definice lineární funkce } f(u+v) = f(u) + f(v)) \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(a_i b_i) && \text{(definice lineární funkce } f(\alpha u) = \alpha f(u)) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i f(b_i) \end{aligned}$$

3. Nechť je zobrazení $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dané:

$$f\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$$
$$f\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

(a) Určete matici zobrazení f vůči kanonické bázi $K = \left\{(1,0)^T, (0,1)^T\right\}$:

Řešení: Využijeme významu té matice, víme, že:

$$_K[f]_K \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = f\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)$$
$$_K[f]_K \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = f\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$$

Tedy jasně vidíme, že:

$$_K[f]_K = \begin{pmatrix}3 & -1\\4 & 1\end{pmatrix}$$

(b) Určete obraz $f((6,5)^T)$.

Řešení: Přímo dle definice máme:

$$\begin{aligned} f\left(6\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) &= 5f\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) + 6f\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)\\ &= 5\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}9\\26\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Pro nás bude ale mnohem přínosnější toto počítat pomocí maticového násobení:

$$\begin{pmatrix}3 & -1\\4 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\\26\end{pmatrix}$$

(c) Mějme zobrazení $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dané: $g(x,y) = (x-y, 2y-2x)^T$, sestrojte matici zobrazení g vůči kanonické bázi.

Řešení: Toho, že máme zobrazení zadané trošku nezvykle se nezalekneme. Stačí za x, y dosadit libovolně, například:

$$g(1,0) = (1,-2)^T$$
$$g(0,1) = (-1,2)^T$$

Tedy rovnou můžeme psát:

$$_K[g]_K = \begin{pmatrix}1 & -1\\-2 & 2\end{pmatrix}$$

(d) Sestrojte matici zobrazení $h = f \circ g$, tedy $h(v) = f(g(v))$.

Řešení: Odvodíme, že složení zobrazení odpovídá násobení matic. Víme, že pro každý $v \in \mathbb{R}^2$ platí:

$$\begin{aligned}
(f \circ g)(v) &= f(g(v)) \\
&= f\left({}_K[g]_K [v]_K\right) \\
&= {}_K[f]_K \left({}_K[g]_K [v]_K\right) \\
&= \left({}_K[f]_K {}_K[g]_K\right) [v]_K \\
&= {}_K[f \circ g]_K [v]_K
\end{aligned}$$

Všude jsme se „tahali“ se souřadnicemi. V dalším případě uvidíte, že to má velice dobrý důvod. Jen poznámka na okraj: tady nám stačí jediné K, neboť se vždy jedná o bázi jednoho a toho samého prostoru. Obecně pokud máme vektorové prostory U, V, W a lineární zobrazení g, f, h kde $g\colon U \to V$, $f: V \to W$, $h\colon U \to W$ kde $h = f \circ g$ a A, B, C jsou po řadě báze prostorů U, V, W, pak můžeme psát:

$${}_C[f]_B [x]_B$$

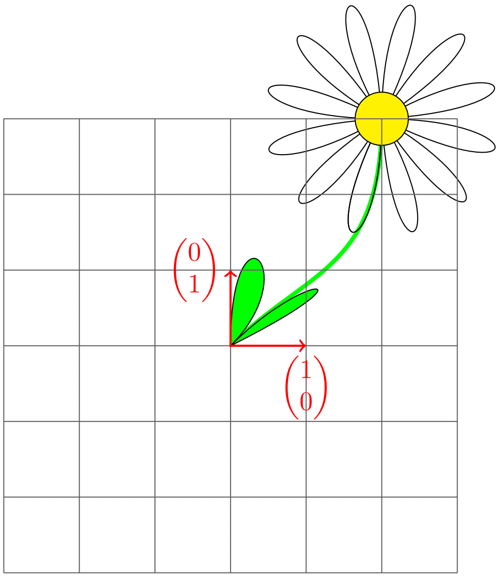
Nebo obecněji celý ten přepis ještě jednou:

$$\begin{aligned}
(f \circ g)(v) &= f(g(v)) \\
&= f\left({}_B[g]_A [v]_A\right) \\
&= {}_C[f]_B \left({}_B[g]_A [v]_A\right) \\
&= \left({}_C[f]_B {}_B[g]_A\right) [v]_A \\
&= {}_C[f \circ g]_A [v]_A
\end{aligned}$$

Všimněte si, že vždy „sousední písmenka souhlasí“. To znamená, že pokud máme vyjádřenou matici zobrazení tak, že bere souřadnice v nějaké bázi, tak ji musíme zprava násobit vektorem souřadnic v té dané bázi.

Tohle všechno se může zdát trochu strašlivé, ale rozmyslete si, že jsme jen řekli (pro naše původní zadání):

$$\begin{aligned}
{}_K[f \circ g]_K &= {}_K[f]_K {}_K[g]_K \\
&= \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

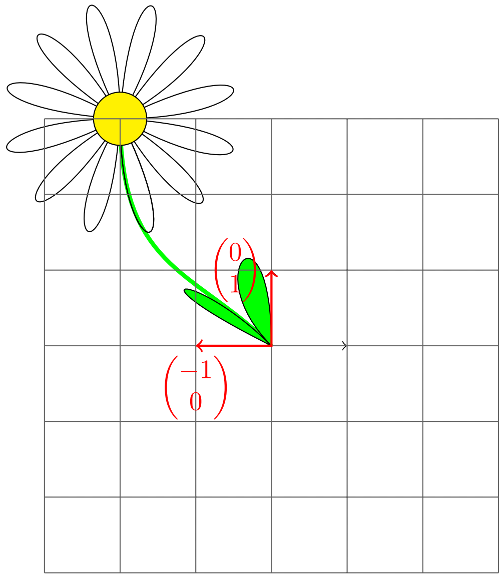


Obrázek 1: Původní netransformovaná květina.

4. Určete matice lineárních zobrazení v rovině.

   - identita

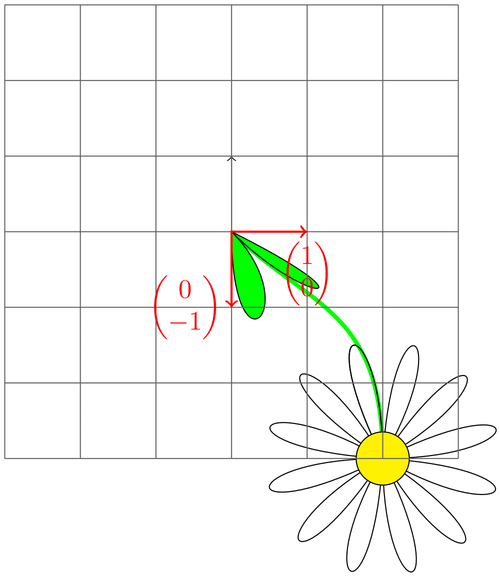
     Řešení: Na obrázku 1 vidíme květinu rostoucí z počátku souřadnic, která ještě není lineárně transformovaná. Stejně je znázorněná původní mřížka 3x3, která je v tomto případě překrytá její lineárně transformovanou kopií. Černé šipky představují původní vektory $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ a červené šipky s popisky jejich obrazy (v tomto případě opět splývají). Zobrazení je identita a je samozřejmně dáno maticí $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ (první sloupec je kam se zobrazí vektor $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ a druhý sloupec je obraz vektoru $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$).



Obrázek 2: Symetrie podle osy y.

- symetrie podle osy y

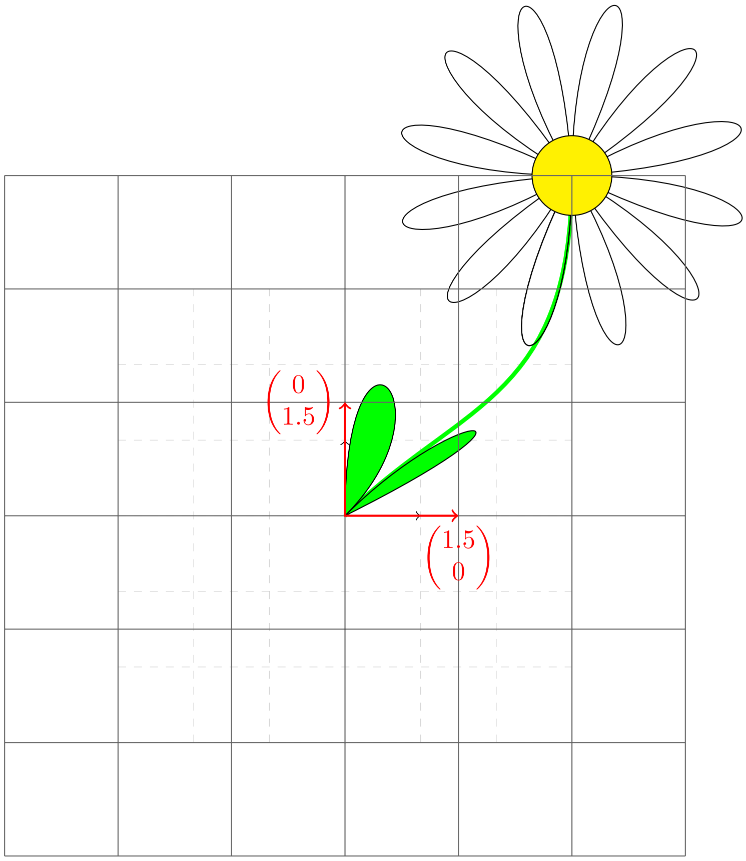
  Řešení: Jak vidíme na obrázku 2 symetie podle osy y jen překlopí květinu, maticí transformace je $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$



Obrázek 3: Symetrie podle osy x.

- symetrie podle osy x

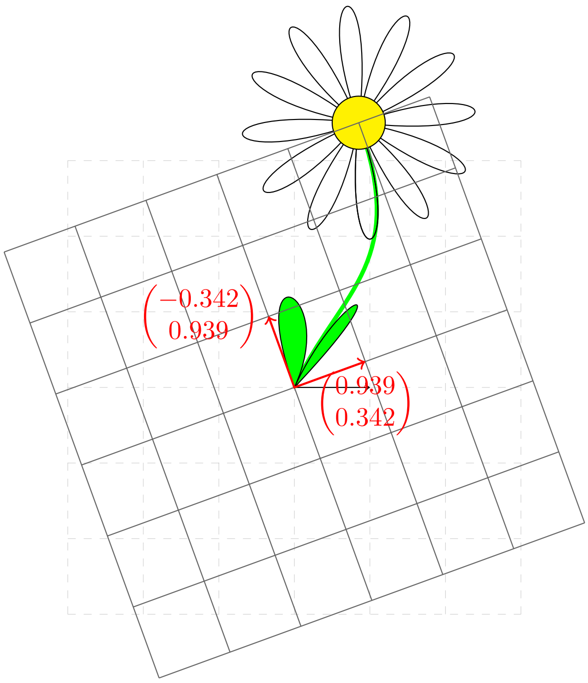
  Řešení: Jak vidíme na obrázku 3 symetie podle osy x jen překlopí květinu květem dolů, maticí transformace je $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$



Obrázek 4: Zvětšení 1,5-krát.

- zvětšení

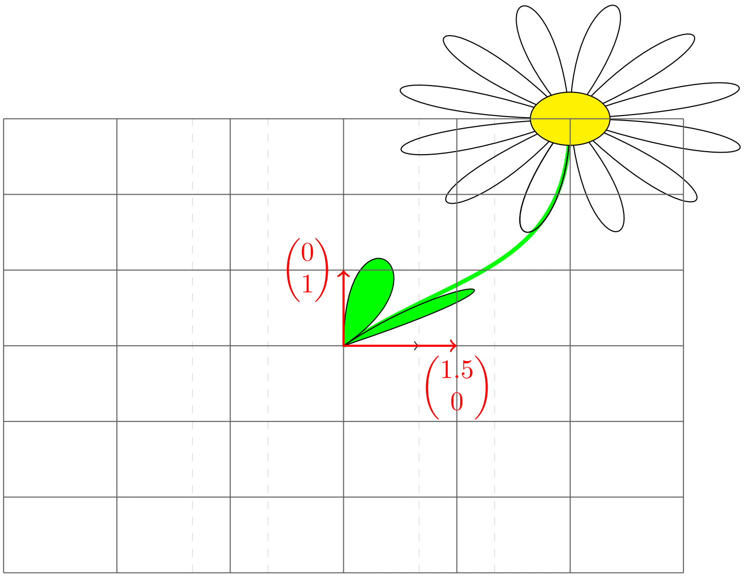
  Řešení: Zvětšení (obrázek 4) 1, 5-krát je dáno maticí $\begin{pmatrix}1,5 & 0\\ 0 & 1,5\end{pmatrix}$



Obrázek 5: Rotace o úhel 20°, čísla jsou zaokrouhlená.

- rotace okolo počátku souřadnic

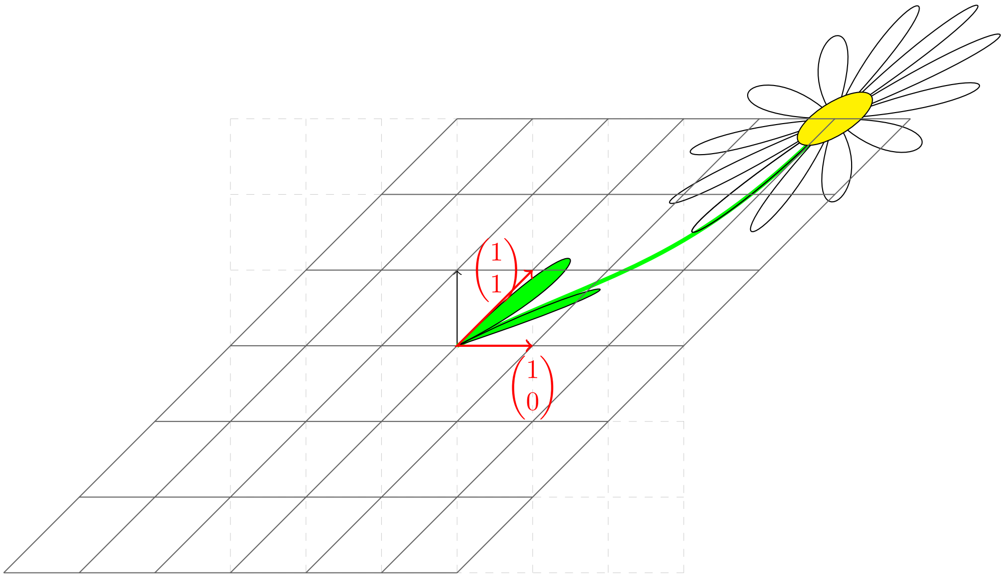
  Řešení: Rotace okolo počátku souřadnic proti směru hodinových ručiček o úhel φ (obrázek 4) zobrazí vektor $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ na vektor $\begin{pmatrix}\cos\varphi\\\sin\varphi\end{pmatrix}$ a vektor $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ na vektor $\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\\cos\varphi\end{pmatrix}$ její matice je tedy $\begin{pmatrix}\cos(\varphi) & -\sin(\varphi)\\\sin(\varphi) & \cos(\varphi)\end{pmatrix}$. Konkrétní rotace je zobrazena na obrázku 5.



Obrázek 6: Zvětšení 1,5-krát podle osy x.

- zvětšení podle osy x

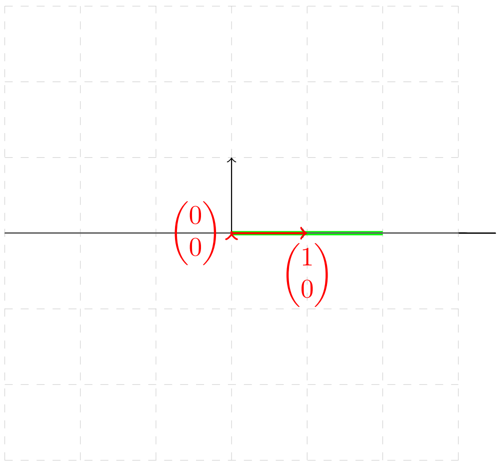
  Řešení: Zvětšení podél osy x (obrázek 6) $1,5$-krát je dáno maticí $\begin{pmatrix}1,5 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$



Obrázek 7: Zkosení podél osy x.

- zkosení

  Řešení: Zkosení přičte k jednumu vektoru násobek druhého (obrázek 7), je dáno maticí $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$



Obrázek 8: Projekce na osu x.

- projekce na osu x

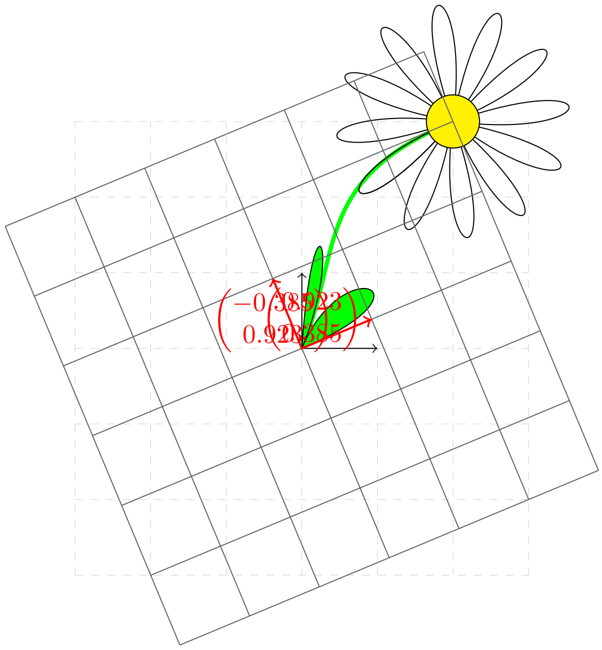
  Řešení: Projekce na osu x (obrázek 8) ponechá netknutou x-ovou složku a y-ovou nastaví na nulu, je dáno maticí $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$

- symetrie podle obecné osy

Řešení: Vyřešme pro konkrétnost symetrii okolo přímky procházející počátkem souřadnic a bodem $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ označme si toto zobrazení jako f. Kam se zobrazí vektor $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$? Na to není tak snadné odpovědět, ale předvedeme si jiný způsob, jak najít matici tohoto lineárního zobrazení $_K[f]_K$ (a pomocí ní už pak snadno i obraz libovolného vektoru).

Víme, že lineární zobrazení je jednoznačně dáno obrazy nějaké báze, nemusí se nutně jednat o kanonickou bázi. Přemýšlejme, které obrazy budou jednoduché najít (takto dostaneme nejčastěji lineární zobrazení zadané, pomocí obrazů nějakých vektorů). Symetrie podle přímky zachová danou přímku, víme tedy, že: $f\left(\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$. Navíc, co je kolmé na tuto přímku se akorát zobrazí na minus samo sebe: $f\left(\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ (využili jsme poučku ze střední školy, jak najít kolmý vektor, ve druhém semestru se to naučíme obecně). Dané dva předobrazy tvoří bázi B (ověřte), jednoduše jsme tedy získali matici $_K[f]_B = \begin{pmatrix}2 & 3\\3 & -2\end{pmatrix}$. Nyní jen stačí využít, co jsme se naučili o převodech souradnic:

$$\begin{aligned}
_K[f]_K &= {}_K[f]_{B\,B}[id]_K\\
&= {}_K[f]_B \left({}_K[id]_B\right)^{-1}\\
&= \begin{pmatrix}2 & 3\\3 & -2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2 & -3\\3 & 2\end{pmatrix}^{-1}\\
&= \begin{pmatrix}2 & 3\\3 & -2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\frac{2}{13} & \frac{3}{13}\\\frac{-3}{13} & \frac{2}{13}\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\frac{-5}{13} & \frac{12}{13}\\\frac{12}{13} & \frac{5}{13}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$



Obrázek 9: Symetrie kolem přímky jdoucí počátkem a bodem $(2,3)^T$ (čísla jsou zaokrouhlená).

5. Pracujeme nad $\mathbb{Z}_5^3$. Pro báze A, B dané sloupci matic $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

   Řešení: Připomeňme si základní pojmy: Nechť $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ (tedy vektory a_i jsou sloupce matice A) je báze. Nechť vektor x má vyjádření $x = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i a_i$, pak souřadnicemi vektoru x vzhledem k bázi A rozumíme koeficienty $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ a vektor souřadnic značíme $[x]_A = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)^T$.

   Například tedy, pokud bychom měli kanonickou bázi (značme $K = I_n$), pak $[x]_K = x$.

   Matice přechodu: mějme A, B dvě báze jako v zadání, pak maticí přechodu od A k B rozumíme matici ${}_B[\,\mathrm{id}]_A$, po které chceme, aby pro každý vektor x platilo: $[x]_B = {}_B[\,\mathrm{id}]_A [x]_A$. Tedy ze souřadnic v bázi A nám udělá souřadnice v bázi B.

   (a) Určete matici přechodu od souřadnic báze A ke kanonické bázi.

   Řešení: Napřed se zamysleme:

   - Pro který vektor v platí:

     $$[v]_A = (1,0,0)^T$$

     To je jednoduché:

     $$\begin{aligned}[v]_K &= 1A_{*,1} + 0A_{*,2} + 0A_{*,3} \\ &= 1\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix}\end{aligned}$$

   - Pro který vektor u platí:

     $$[u]_A = (0,1,0)^T$$

To je jednoduché:

$$[u]_K = 1A_{*,1} + 0A_{*,2} + 0A_{*,3} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Pro který vektor w platí:

$$[w]_A = (1, 2, 3)^T$$

To je jednoduché:

$$\begin{aligned} [w]_K &= 1A_{*,1} + 2A_{*,2} + 3A_{*,3} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Násobení $A[x]_A$ odpovídá lineární kombinaci sloupců A kde koeficienty jsou jednotlivé souřadnice. Tedy

$$_K[\,\mathrm{id}]_A = A$$

(b) Určete matici přechodu od souřadnic kanonické báze k souřadnicím báze B.

Řešení: Z předchozího víme, že $[x]_K = B[x]_B$. Užijeme krásné věty lineární algebry, která říká, že dimenze řádkového a sloupcového prostoru jsou stejné. Lidsky řečeno: když jsou nezávislé sloupce, jsou nezávislé i řádky a tedy matice je regulární. Tudíž existuje inverzní matice B^{-1}, kterou násobíme zleva a dostaneme: $B^{-1}[x]_K = [x]_B$. Vidíme tedy, že $_B[\,\mathrm{id}]_K = B^{-1}$.

Můžeme psát postupně:

$$\begin{aligned} [x]_K &= {}_K[\,\mathrm{id}]_B[x]_B \\ &\text{(vynásobíme inverzem zleva, to můžeme, } {}_K[\,\mathrm{id}]_B \text{ je regulární matice)} \\ \left({}_K[\,\mathrm{id}]_B\right)^{-1}[x]_K &= \left({}_K[\,\mathrm{id}]_B\right)^{-1} {}_K[\,\mathrm{id}]_B[x]_B \\ \left({}_K[\,\mathrm{id}]_B\right)^{-1}[x]_K &= [x]_B \end{aligned}$$

tedy vidíme, že:

$$_B[\,\mathrm{id}]_K = \left({}_K[\,\mathrm{id}]_B\right)^{-1}$$

(c) Určete matici přechodu od souřadnic báze A k souřadnicím báze B.

Řešení: Už umíme převést souřadnice od báze A ke kanonické a od kanonické k bázi B prostým složením těchto zobrazení dostaneme požadovanou matici přechodu. Tedy

$$_B[\,\mathrm{id}]_A = {}_B[\,\mathrm{id}]_K {}_K[\,\mathrm{id}]_A = B^{-1}A$$

6. Určete matici lineárního zobrazení $f\colon \mathbb{Z}_5^3 \to \mathbb{Z}_5^2$, o kterém víte: $f\left((1,2,3)^T\right) = (1,2)^T$ $f\left((3,2,1)^T\right) = (2,1)^T$ $f\left((4,4,3)^T\right) = (0,2)^T$

   Řešení: Lineární zobrazení je dáno tím, kam zobrazí bázi. Ověřte, že vektory $(1,2,3)^T, (3,2,1)^T, (4,4,3)^T$ tvoří bázi prostoru $\mathbb{Z}_5^3$, označme tuto bázi B. Pak máme jednoduše ${}_K[f]_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

   Pomocí znalostí o převodech mezi bázemi pak můžeme psát:

$$\begin{aligned} {}_K[f]_K &= {}_K[f]_{B\,B}[id]_K \\ &= {}_K[f]_B \left({}_K[id]_B\right)^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   - Je toto zobrazení prosté? *Řešení:* Pokud bychom měli $f(x_1) = f(x_2)$, pak $0 = f(x_1) - f(x_2) = f(x_1 - x_2)$ a tedy $x_1 - x_2$ je netriviální vektor z kernelu. Tedy zobrazení je prosté, pokud je dimenze jádra rovna nule.
   - Pokud není prosté, najděte kolizi (tj. dva různé vektory takové, že $f(x_1) = f(x_2)$). *Řešení:* Stačí najít netriviální vektor x z kernelu (jádra matice f), pak víme, že $f(0) = f(x) = 0$.
   - Je na? *Řešení:* Zobrazení $f\colon U \to V$ je na právě když je dimenze sloupcového prostoru matice f rovna dimenzi V.

7. Odvoďte součtové vzorce pro $\sin(\alpha+\beta)$ a $\cos(\alpha+\beta)$ pomocí matic zobrazení.

Řešení: Použijeme matici pro rotaci o úhel okolo počátku. Jedná se o lineární zobrazení složením dvou rotací dostaneme rotaci o součet příslušných úhlů, proto dostáváme:

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix}.$$

Tedy $\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\beta)\cos(\alpha)$ a $\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta)$.

8. Dokažte, že derivace polynomu je lineární zobrazení. Napište matici derivace pro prostor reálných polynomů stupně nejvýš pět. Jak určíte matici druhé derivace?

Řešení: Reálné polynomy tvoří vektorový prostor. Derivace přiřadí polynomu polynom, součtu polynomů přiřadí součet jejich derivací a alfa-násobku polynomu přiřadí alfa-násobek jeho derivace.

Pokud píšeme vektor polynomu $P(x) = p_0+p_1x+p_2x^2+p_3x^3+p_4x^4+p_5x^5$ jako $(p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)^T$, pak je matice derivace:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ 2p_2 \\ 3p_3 \\ 4p_4 \\ 5p_5 \\ 0 \end{pmatrix}$$