Příklady na procvičení z Lineární algebry 1 (ZS 2020/2021): (9) Báze, dimenze

Buď V vektorový prostor nad $\mathbb{T}$ a mějme vektory $v_1, \dots, v_n \in V$.

Definice 1 (Lineární nezávislost) *Vektory $v_1, \dots, v_n \in V$ se nazývají* lineárně nezávislé*, pokud rovnost $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = 0$ nastane pouze pro $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$. V opačném případě jsou vektory* lineárně závislé*.*

Definice 2 (Lineární obal) Lineární obal *vektorů $v_1, \dots, v_n$ je*

$$Span(v_1, \dots, v_n) = \Big\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \Big| \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{T} \Big\}.$$

Definice 3 (Báze) *Vektory $v_1, \dots, v_n$ tvoří* bázi *V pokud jsou lineárně nezávislé a*

$$Span(v_1, \dots, v_n) = V.$$

Definice 4 (Dimenze) Dimenze *V je velikost jeho libovolné báze.*

Cv. 1. Ve vektorovém prostoru $\mathbb{Z}_5^3$ vyjádřete vektor $(3, 2, 4)$ jako lineární kombinaci vektorů $(3, 3, 2)$, $(1, 1, 4)$ a $(0, 2, 1)$. Je toto vyjádření jednoznačné?

Cv. 2. Doplňte množinu M na bázi vektorového prostoru V.

(a) $M = \{(1, 2, 0, 0)^T, (2, 1, 1, 3)^T, (0, 1, 0, 1)^T\}$, $V = \mathbb{R}^4$.

(b) $M = \{-x^2, x + x^2, x^3 - 1\}$, v prostoru V reálných polynomů stupně nejvýše tři.

Cv. 3. Souřadnice vektoru u vůči uspořádané bázi $X = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ jsou $[u]_X = (a_1, a_2, a_3, a_4)^T$. Určete souřadnice téhož vektoru u vůči bázi $Y = (v_1 + v_4, v_2 + v_3, v_4, v_2)$.

Cv. 4. Určete dimenze a báze následujících vektorových podprostorů prostoru $\mathbb{Z}_5^7$.

(a) $U = \text{Span}\big((4, 1, 0, 3, 4, 0, 0)^T, (4, 3, 1, 0, 2, 3, 1)^T, (4, 1, 4, 0, 3, 2, 4)^T, (2, 4, 1, 4, 4, 3, 1)^T, (0, 4, 3, 2, 2, 4, 3)^T\big)$.

(b) $V = \big\{(x_1, \dots, x_7)^T \in \mathbb{Z}_5^7 : x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 + x_6 + 2x_7 = 0, 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 + 4x_5 + 2x_6 + 4x_7 = 0,\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 4x_5 + 2x_7 = 0\big\}$.

Cv. 5. Rozhodněte, zdali prostory U a V z minulého příkladu jsou v inkluzi a pokud ano, nalezněte takovou bázi většího z nich, aby rozšiřovala bázi menšího.