Příklady na procvičení z Lineární algebry 1 (ZS 2020/2021):
(9) Báze, dimenze

Buď V vektorový prostor nad $\mathbb{T}$ a mějme vektory $v_1, \ldots, v_n \in V$.

Definice 1 (Lineární nezávislost) *Vektory $v_1, \ldots, v_n \in V$ se nazývají* lineárně nezávislé, *pokud rovnost $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = 0$ nastane pouze pro $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$. V opačném případě jsou vektory* lineárně závislé.

Definice 2 (Lineární obal) Lineární obal *vektorů $v_1, \ldots, v_n$ je*

$$Span(v_1, \ldots, v_n) = \Big\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \Big| \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{T} \Big\}.$$

Definice 3 (Báze) *Vektory $v_1, \ldots, v_n$ tvoří* bázi V *pokud jsou lineárně nezávislé a*

$$Span(v_1, \ldots, v_n) = V.$$

Definice 4 (Dimenze) Dimenze V *je velikost jeho libovolné báze.*

Cv. 1. Ve vektorovém prostoru $\mathbb{Z}_5^3$ vyjádřete vektor $(3, 2, 4)$ jako lineární kombinaci vektorů $(3, 3, 2)$, $(1, 1, 4)$ a $(0, 2, 1)$. Je toto vyjádření jednoznačné?

<u>Řešení:</u>
Vyřešíme soustavu rovnic, která vznikne tak, že vektory $(3, 3, 2)$, $(1, 1, 4)$ a $(0, 2, 1)$ dáme do sloupců matice a vektor $(3, 2, 4)$ použijeme jako vektor pravé strany.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Dostaneme $x_3 = 2$, $x_2 = p$ a $x_1 = 1 + 3p$ tedy:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = (1 + 3p) \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Řešení tedy není jednoznačné a vektory $(3, 3, 2), (1, 1, 4)$ a $(0, 2, 1)$ netvoří bázi $\mathbb{Z}_5^3$.

Cv. 2. Doplňte množinu M na bázi vektorového prostoru V.

(a) $M = \big\{(1, 2, 0, 0)^T, (2, 1, 1, 3)^T, (0, 1, 0, 1)^T\big\}$, $V = \mathbb{R}^4$.

(b) $M = \big\{-x^2, x + x^2, x^3 - 1\big\}$, v prostoru V reálných polynomů stupně nejvýše tři.

<u>Řešení:</u>

(a) Prostor V má dimenzi 4, proto je třeba rozšířit M o jeden vektor. Z věty o výměně platí, že alespoň jeden z vektorů kanonické báze je nezávislý na vektorech z M. Nezávislost zjistíme současným vyřešením rovnic $a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 = e_i$, kde u_1, u_2, u_3 jsou vektory z M a e_i jsou vektory kanonické báze.

Dostáváme matici

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 6 & -1 \end{array}\right)$$

Protože poslední řádek obsahuje pivot ve všech sloupcích na pravé straně, vidíme, že doplněním o libovolný vektor e_i se stane množina M bázi prostoru $\mathbb{R}^4$.

(b) Zkusíme doplnit M o některý vektor z kanonické báze $1, x, x^2, x^3$. Máme matici

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{ccc|cccc} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Zde vidíme, že buď $M \cup \{1\}$ nebo $M \cup \{x^3\}$ (a i mnoho jiných možností, které jsme však netestovali) tvoří bázi V, nikoli však $M \cup \{x\}$ nebo $M \cup \{x^2\}$.

Cv. 3. Souřadnice vektoru u vůči uspořádané bázi $X = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ jsou $[u]_X = (a_1, a_2, a_3, a_4)^T$. Určete souřadnice téhož vektoru u vůči bázi $Y = (v_1 + v_4, v_2 + v_3, v_4, v_2)$.

Řešení:

Hledáme taková $(b_1, \dots, b_4)^T = [u]_Y$, aby platilo

$b_1(v_1 + v_4) + b_2(v_2 + v_3) + b_3v_4 + b_4v_2 = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + a_4v_4.$

Protože je X báze, jsou koeficienty u v_i jsou jednoznačné. Dostáváme soustavu

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1 \\ b_2 + b_4 &= a_2 \\ b_2 &= a_3 \\ b_1 + b_3 &= a_4 \end{aligned}$$

Nové souřadnice jsou $[u]_Y = (a_1, a_3, a_4 - a_1, a_2 - a_3)^T$.

Cv. 4. Určete dimenze a báze následujících vektorových podprostorů prostoru $\mathbb{Z}_5^7$.

(a) $U = \mathrm{Span}\big((4, 1, 0, 3, 4, 0, 0)^T, (4, 3, 1, 0, 2, 3, 1)^T, (4, 1, 4, 0, 3, 2, 4)^T, (2, 4, 1, 4, 4, 3, 1)^T, (0, 4, 3, 2, 2, 4, 3)^T\big).$

(b) $V = \big\{(x_1, \dots, x_7)^T \in \mathbb{Z}_5^7 : x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 + x_6 + 2x_7 = 0, 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 + 4x_5 + 2x_6 + 4x_7 = 0,\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 4x_5 + 2x_7 = 0\big\}.$

Řešení:

(a) Z generátorů sestavíme matici (vektory změníme na řádkové) a tuto matici převedeme na odstupňovaný tvar. Elementární úpravy nemění řádkový prostor, výsledné nenulové řádky tvoří tedy hledanou bázi.

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 0 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 4 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \sim\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dimenze U je tedy 3 a báze U je např. $(1,2,3,2,2,4,3)^T$, $(0,1,1,0,2,3,1)^T$, $(0,0,1,3,1,3,1)^T$.

(b) Z rovnic sestavíme soustavu a budeme hledat bázi jejího řešení. Např. pro V máme

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 1 & 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

S řešením $x = p_1(2,1,0,0,0,0,0)^T + p_2(1,0,2,1,0,0,0)^T + p_3(1,0,1,0,1,0,0)^T + p_4(1,0,4,0,0,3,1)^T$.

Vektory u parametrů tvoří bázi prostoru řešení, m.j. je okamžitě vidět, že dimenze tohoto prostoru je rovna počtu volných proměnných.

Dimenze V je tedy 4 a báze V je např. $(2,1,0,0,0,0,0)^T$, $(1,0,2,1,0,0,0)^T$, $(1,0,1,0,1,0,0)^T$, $(1,0,4,0,0,3,1)^T$.

Cv. 5. Rozhodněte, zdali prostory U a V z minulého příkladu jsou v inkluzi a pokud ano, nalezněte takovou bázi většího z nich, aby rozšiřovala bázi menšího.

Řešení:

Dimenze podprostoru je menší než dimenze prostoru. Dimenze jsme již určili dříve v předchozím příkladu, můžeme tedy okamžitě vyloučit případ $V \subset U$. Zbývá ověřit, zdali jsou prostory v opačné inkluzi, nebo jsou-li inkluzí neporovnatelné. Stačí ověřit, jestli $\dim(\mathrm{Span}(U \cup V)) = \dim(V) = 4$.

Popřípadě se také můžeme pokusit vyjádřit vektory báze menšího prostoru jako lineární kombinace větší báze (což je vlastně totéž).

				2	1	0	0	0	0	0
				1	0	2	1	0	0	0
				1	0	1	0	1	0	0
				1	0	4	0	0	3	1
2	2	2	3	1	2	3	2	2	4	3
1	0	2	1	0	1	1	0	2	3	1
0	3	1	1	0	0	1	3	1	3	1

Zde řádky první matice udávají souřadnice vektorů báze U vůči bázi V (obě tyto báze jsme si zvolili výše). Všimněte si, že se souřadnice dají snadno určit z 2., 4., 5. a 7. složky vektoru a uvědomte si proč.

Pro rozšíření báze vyjdeme z libovolné báze menšího prostoru a přidáváme vektory z většího, dokud nedostaneme požadovanou dimenzi.

Platí inkluze $U \subset V$. Tato inkluze se dá nahlédnout i snáze, protože všechny vektory báze U splňují rovnice z definice V.