

**Příklady na procvičení z Lineární algebry 1 (ZS 2020/2021):**  
**(8) Lineární závislost a nezávislost**

**Definice 1 (Lineární nezávislost)** Vektory  $v_1, \dots, v_n \in V$  se nazývají lineárně nezávislé, pokud rovnost  $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = 0$  nastane pouze pro  $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ . V opačném případě jsou vektory lineárně závislé.

---

**Cv. 1.** Zjistěte zda jsou vektory z  $\mathbb{R}^3$  lineárně nezávislé:

(a)  $(2, 3, -5), (1, -1, 1), (3, 2, -2)$ .

(b)  $(2, 0, 3), (1, -1, 1), (0, 2, 1)$ .

**Řešení:**

(a) Hledáme koeficienty  $a, b, c \in \mathbb{R}$  takové, že

$$a \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Z toho tedy dostaneme soustavu

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ -5 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right).$$

Všimněte si, že jednotlivé vektory jsou ve sloupcích matice. Vyřešením soustavy zjistíme, že má řešení pouze  $a = b = c = 0$ . Vektory jsou tedy lineárně nezávislé.

(b) Obdobně jako v (a) vytvoříme soustavu

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Pomocí Gaussovy eliminace dostaneme

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Soustava má tedy i nějaké netriviální řešení a vektory jsou tedy lineárně závislé. Pro úplnost doplníme, že řešení soustavy je  $a = -t, b = 2t, c = t$  pro parametr  $t \in \mathbb{R}$ . Tedy například s koeficienty  $-1, 2$  a  $1$  dostaneme

$$-1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**Cv. 2.** Necht  $u, v, w$  jsou lineárně nezávislé vektory z vektorového prostoru  $V$  nad  $\mathbb{R}$ . Rozhodněte, zdali jsou následující množiny lineárně závislé či nezávislé.

- (a)  $\{u, u + v, u + w\}$ .  
 (b)  $\{u - v, u - w, v - w\}$ .

**Řešení:**

- (a) Obdobně jako v předchozím příkladě hledáme koeficienty  $a, b, c \in \mathbb{R}$  takové, aby

$$0 = au + b(u + v) + c(u + w) = (a + b + c)u + bv + cw.$$

Protože  $u, v, w$  jsou lineárně nezávislé, musí být  $a + b + c = 0$ ,  $b = 0$  a  $c = 0$  a tedy i  $a = 0$ . Odtud je  $\{u, u + v, u + w\}$  lineárně nezávislá.

- (b) Obdobně jako v předchozím případě, hledáme  $a, b, c \in \mathbb{R}$  takové, že

$$0 = a(u - v) + b(u - w) + c(v - w) = (a + b)u + (-a + c)v + (-b - c)w.$$

Tedy  $a + b = 0$ ,  $-a + c = 0$  a  $-b - c = 0$ . Vyřešením dané soustavy dostaneme řešení  $a = t, b = -t, c = t$  pro parametr  $t \in \mathbb{R}$ . Vektory  $\{u - v, u - w, v - w\}$  jsou tedy lineárně závislé, např. s koeficienty  $(1, -1, 1)^T$ .

**Cv. 3.** Necht  $V$  je vektorový prostor nad tělesem  $K$  a  $X \subseteq Y \subseteq V$ . Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

- (a) Je-li  $X$  nezávislá, je  $Y$  závislá.  
 (b) Je-li  $X$  nezávislá, je  $Y$  nezávislá.  
 (c) Je-li  $X$  závislá, je  $Y$  závislá.  
 (d) Je-li  $Y$  nezávislá, je  $X$  nezávislá.  
 (e) Je-li  $Y$  závislá, je  $X$  závislá.

**Řešení:**

Obecně dle definice se nezávislost přenáší “dolů” a závislost “nahoru”. Konkrétně:

- (a) Neplatí:  $X = \{(1, 0)^T\}$  a  $Y = \{(1, 0)^T, (0, 1)^T\}$  jsou obě nezávislé v  $\mathbb{R}^2$ .  
 (b) Neplatí:  $X = \{(1, 0)^T\}$  je nezávislá, ale  $Y = \{(1, 0)^T, (2, 0)^T\}$  je už závislá v  $\mathbb{R}^2$ .  
 (c) Platí. Mějme  $X = \{v_1, \dots, v_\ell\}$  a  $Y = \{v_1, \dots, v_\ell, w_1, \dots, w_k\}$ . Dle předpokladu je  $X$  závislá, tedy existují  $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell \in K$  takové, že  $(\alpha_1, \dots, \alpha_\ell) \neq (0, \dots, 0)$  a

$$\sum_{i \in [\ell]} \alpha_i x_i = 0.$$

Veźměme  $\beta_{\ell+1}, \dots, \beta_k = (0, \dots, 0)$ . Pak stále platí, že  $(\alpha_1, \dots, \alpha_\ell, \beta_1, \dots, \beta_k) \neq (0, \dots, 0)$  a

$$\sum_{i \in [\ell]} \alpha_i v_i + \sum_{j \in [k]} \beta_j w_j = 0$$

je netriviální lineární kombinace vektorů z  $Y$ , která se rovná 0. Množina  $Y$  je tedy také lineární závislá.

(d) Platí. Jde o obměnu bodu (c).

(e) Neplatí:  $Y = \{(1, 0)^T, (2, 0)^T\}$  je závislá, ale  $X = \{(1, 0)^T\}$  je nezávislá v  $\mathbb{R}^2$ .

**Cv. 4.** Rozhodněte, zda vektory  $(0, 1, 1, 1)^T, (1, 0, 1, 1)^T, (1, 1, 0, 1)^T, (1, 1, 1, 0)^T$  jsou lineárně závislé v  $\mathbb{R}^4$  resp. v  $\mathbb{Z}_3^4$ .

**Řešení:**

Úlohu řešíme stejně jako úlohu 1, jen jednou počítáme nad tělesy  $\mathbb{R}$  a podruhé nad  $\mathbb{Z}_3$ . Zjistíme, že nad  $\mathbb{R}$  jsou vektory lineárně nezávislé a nad  $\mathbb{Z}_3$  jsou lineárně závislé. Vidíme tedy, že lineární závislost/nezávislost závisí na volbě tělesa, nad kterým je daný vektorový prostor.

**Cv. 5.** Buďte  $U, V$  podprostory prostoru  $W$ . Dokažte, že  $U \cap V = \{0\}$  právě tehdy, když každý vektor  $x \in U + V$  se dá jednoznačně zapsat jako  $x = u + v$ , kde  $u \in U, v \in V$ .

**Řešení:**

Mějme 2 vyjádření vektoru  $x$ :

$$u_1 + v_1 = x = u_2 + v_2,$$

pro  $u_1, u_2 \in U$  a  $v_1, v_2 \in V$ . Rovnost upravíme na

$$u_1 - u_2 = v_2 - v_1.$$

Vektor  $u_1 - u_2$  leží v  $U$  a vektor  $v_2 - v_1$  leží ve  $V$ .

Pokud tedy  $U \cap V = \{0\}$ , pak  $u_1 - u_2 = v_2 - v_1 = 0$ . Z čehož, ale vyplývá, že  $u_1 = u_2$  a  $v_1 = v_2$  a vyjádření  $x$  tedy je jednoznačné.

Na druhou stranu, pokud vyjádření  $x$  není jednoznačné, pak  $u_1 \neq u_2$  nebo  $v_1 \neq v_2$  (ve skutečnosti musí nastat obě možnosti). Nechť tedy  $u_1 \neq u_2$  (druhý případ je obdobný). Pak ale  $u_1 - u_2 \neq 0$ . Vektor  $u_1 - u_2$  však leží jak v  $U$  tak ve  $V$ . Průnik  $U \cap V$  tedy obsahuje i nenulový vektor.

**Cv. 6.** Určete, zdali následující množiny vektorů jsou nezávislé v prostoru reálných funkcí  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (nad tělesem  $\mathbb{R}$ ).

(a)  $\{2x - 1, x - 2, 3x\}$ .

(b)  $\{x^2 + 2x + 3, x + 1, x - 1\}$ .

(c)  $\{\sin x, \cos x\}$ .

(d)  $\{\sin(x + 1), \sin(x + 2), \sin(x + 3)\}$ .

(e)  $\{\ln(x), \log_{10}(x), \log_2(x^2)\}$ .

**Řešení:**

- (a) Označme  $f(x) = 2x - 1$ ,  $g(x) = x - 2$  a  $h(x) = 3x$ . Pak hledáme  $a, b, c \in \mathbb{R}$  takové, že  $a \cdot f(x) + b \cdot g(x) + c \cdot h(x) = 0$  pro všechna  $x \in \mathbb{R}$ . Pokud tedy dosadíme za  $f, g$  a  $h$  dostaneme:

$$a \cdot (2x - 1) + b \cdot (x - 2) + c \cdot 3x = (2a + b + 3c) \cdot x + (-a - 2b) = 0.$$

Rovnost je splněna pro všechna  $x$  právě tehdy když:

$$2a + b + 3c = 0$$

$$-a - 2b = 0$$

Tato soustava má netriviální řešení například  $(-2, 1, 1)$ . Funkce jsou tedy lineárně závislé.

- (b) Opět hledáme  $a, b, c \in \mathbb{R}$  takové, že

$$a \cdot (x^2 + 2x + 3) + b \cdot (x + 1) + c \cdot (x - 1) = a \cdot x^2 + (2a + b + c) \cdot x + (b - c) = 0.$$

Z toho dostaneme homogenní soustavu

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

Tato soustava má jen triviální řešení  $(0, 0, 0)$ . Funkce jsou tedy lineárně nezávislé.

- (c) Snažíme se splnit rovnici  $a \sin x + b \cos x = 0$ . Pokud dosadíme  $x = 0$ , pak dostaneme  $b = 0$ , protože  $\sin 0 = 0$  a  $\cos 0 = 1$ . Pokud dosadíme  $x = \frac{\pi}{2}$ , pak dostaneme  $a = 0$ , protože  $\sin \frac{\pi}{2} = 1$  a  $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ . Funkce jsou tedy lineárně nezávislé.
- (d) Ze součtových vzorců pro  $\sin x$  máme:

$$\sin(x + 1) = \sin(x) \cdot \cos(1) + \cos(x) \cdot \sin(1)$$

$$\sin(x + 2) = \sin(x) \cdot \cos(2) + \cos(x) \cdot \sin(2)$$

$$\sin(x + 3) = \sin(x) \cdot \cos(3) + \cos(x) \cdot \sin(3)$$

Sestavíme tedy rovnici

$$\begin{aligned} 0 &= a \cdot \sin(x + 1) + b \cdot \sin(x + 2) + c \cdot \sin(x + 3) \\ &= (a \cdot \cos(1) + b \cdot \cos(2) + c \cdot \cos(3)) \cdot \sin(x) \\ &\quad + (a \cdot \sin(1) + b \cdot \sin(2) + c \cdot \sin(3)) \cdot \cos(x). \end{aligned}$$

Jelikož jsou  $\sin$  a  $\cos$  lineárně nezávislé, pak musí platit:

$$a \cos(1) + b \cos(2) + c \cos(3) = 0$$

$$a \sin(1) + b \sin(2) + c \sin(3) = 0$$

Což je homogenní soustava o 2 rovnicích a 3 neznámých, musí mít tedy nějaké netriviální řešení. Funkce jsou tedy lineárně závislé.

- (e) Platí následující rovnosti:  $\log_{10}(2x) = \frac{\ln x + \ln 2}{\ln 10}$  a  $\log_2(x^2) = \frac{2 \ln x}{\ln 2}$ . V rovnici  $a \cdot \ln(x) + b \cdot \log_{10}(2x) + c \cdot \log_2(x^2) = 0$  jsou první a poslední člen vzájemnými násobky. Rovnice má tedy netriviální řešení, například  $(a, b, c) = (-2, 0, \ln 2)$ . Funkce jsou tedy lineárně závislé.