

1 Vektorové prostory a podprostory, lineární obal

1. Rozhodněte, pro která $a \in \mathbb{Z}_7$ tvoří množina

$$S_a = \{(x, y, z)^T : x + 2y - 3z = a\}$$

vektorový podprostor \mathbb{Z}_7^3 . Kolik má tento vektorový podprostor prvků?

2. Nad \mathbb{Z}_{11} určete průnik řešení soustavy rovnic $Ax = 0$ a lineárního obalu množiny vektorů $\{v_1, v_2, v_3\}$, přičemž

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}, v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3. Tvoří všechny polynomy proměnné X s koeficienty nad \mathbb{Z}_3 stupně nejvýše 10 vektorový prostor? Kolik má tento prostor prvků?

Řešení: Přímočaré, ano, 3^{11} .

4. Nad \mathbb{Z}_7 určete, kolik prvků má $\left\langle \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle \cap \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

Řešení: Označme dané vektory v_1, v_2, v_3 a w_1, w_2, w_3 . Nyní stačí vyřešit rovnici $xv_1 + yv_2 + zv_3 = rw_1 + sw_2 + tw_3$, podívat se, jaké možné kombinace hodnot r, s, t vyšly a těmi přenásobit w_1, w_2, w_3 . (Pokud by dané vektory byly lineárně závislé, mohlo by se stát, že více řešení dá ten samý vektor.) Odpověď: 49

5. Uvažme vektorový prostor všech funkcí z \mathbb{N} do \mathbb{Z}_2 . Pro i , buď a_i funkce, která i zobrazí na 1 a vše ostatní na 0. Buď b funkce, která vše zobrazí na jedničku. Leží b v lineárním obalu $\langle a_i, i \in \mathbb{N} \rangle$?

Řešení: neleží, v lineárním obalu leží jen lineární kombinace konečného počtu vektorů, a to b není.

6. Je-li \mathbb{T} komutativní těleso, tak každý podprostor \mathbb{T}^n lze popsat dvěma různými způsoby: Buď jakožto řešení systému rovnic, nebo jako lineární obal nějakých vektorů.

- (a) Nad \mathbb{Q} popište řešení homogenní soustavy $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ jako lineární obal vektorů.

Řešení: Jde vlastně o to, vyřešit danou soustavu rovnic. Řešení lze zapsat např. v tvaru

$$\{r \cdot (3 \ 1 \ -5 \ 0)^T + s \cdot (1 \ 0 \ -5 \ 1)^T \mid r, s \in \mathbb{Q}\}.$$

Tedy výsledkem je $\langle (3 \ 1 \ -5 \ 0)^T, (1 \ 0 \ -5 \ 1)^T \rangle$.

(b) Najděte soustavu rovnic, jejímž řešením bude lineární obal vektorů

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ a } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Hint: Hledáme vlastně taková čísla a, b, c, d , aby platilo

$$1 \cdot a + 2 \cdot b - 1 \cdot c + 0 = 0 \text{ a } 1 \cdot a + 0 \cdot b + 0 \cdot c + 1 \cdot d = 0.$$

Jinými slovy řešíme rovnici $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Nestačí však najít jedno

řešení (to by řešení oné soustavy mohlo vyjít větší než onen požadovaný lineární obal).

Řešení: Například $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.