1 Vektorové prostory a podprostory, lineární obal

1. Rozhodněte, pro která $a \in \mathbb{Z}_7$ tvoří množina

$$S_a = \{(x, y, z)^T : x + 2y - 3z = a\}$$

vektorový podprostor $\mathbb{Z}_7^3$. Kolik má tento vektorový podprostor prvků?

Řešení. Pokud S_a má být vektorový podprostor $\mathbb{Z}_7^3$ tak musí obsahovat nulový vektor, tedy $(0, 0, 0)^T$. Vidíme tedy, že musí platit $a = 0 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 = 0$. Dále tedy předpokládejme, že $a = 0$. Dokažme nyní, že v takovém případě o vektorový podprostor jde. K tomu stačí ověřit uzavřenost na násobky prvky ze $\mathbb{Z}_7$ a na sčítání vektorů.

Uzavřenost na násobky Je-li $(x, y, z) \in S_0$ a $\alpha \in \mathbb{Z}_7$, tak $\alpha x + 2\alpha y - 3\alpha z = \alpha(x + 2y - 3z) = \alpha \cdot 0 = 0$, a tedy i $\alpha(x, y, z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z) \in S_0$.

Uzavřenost na sčítání Pro $(x, y, z) \in S_0$ a $(x', y', z') \in S_0$, díky distributivitě, komutativitě a asociativitě sčítání v $\mathbb{Z}_7$ platí $(x + x') + 2(y + y') - 3(z + z') = (x + 2y - 3z) + (x' + 2y' - 3z) = 0 + 0 = 0$, a tedy i $(x + x', y + y', z + z') \in S_0$.

Nyní spočteme počet prvků S_0. Pro libovolnou volbu x a y dostáváme právě jeden prvek z (totiž $\frac{x+2y}{3} = 5x + 3y$), který splňuje $x + 2y - 3z = 0$. Jelikož máme 7 možností pro x a 7 možností pro y, podprostor S_0 má celkem $7 \cdot 7 = 49$ prvků.

Závěr: O vektorový prostor se jedná pouze pro $a = 0$, v kterémžto případě má tento prostor 49 prvků. □

2. Nad $\mathbb{Z}_{11}$ určete průnik řešení soustavy rovnic $Ax = 0$ a lineárního obalu množiny vektorů $\{v_1, v_2, v_3\}$, přičemž

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \; v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Nejprve vyřešíme danou soustavu rovnic.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -7 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -7 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Množina všech řešení tedy vychází $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : r, s \in \mathbb{Z}_{11} \right\}$.

Musíme zjistit, které z těchto vektorů se dají vyjádřit jako $a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3$, kde $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Z}_{11}$. Označíme-li $w_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ a $w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ máme vlastně vyřešit

$a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3 = rw_1+sw_2$, neboli $a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3+r(-w_1)+s(-w_2) = 0$:

$$\begin{pmatrix}1&0&1&-1&0\\2&2&0&-6&-4\\1&3&-2&0&-1\\1&1&0&-1&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1&-1&0\\0&2&-2&-4&-4\\0&3&-3&1&-1\\0&1&-1&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1&-1&0\\0&1&-1&-2&-2\\0&3&-3&1&-1\\0&1&-1&0&0\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&0&1&-1&0\\0&1&-1&-2&-2\\0&0&0&7&6\\0&0&0&2&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1&-1&0\\0&1&-1&-2&-2\\0&0&0&1&4\\0&0&0&2&2\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&0&1&-1&0\\0&1&-1&-2&-2\\0&0&0&1&4\\0&0&0&0&-6\end{pmatrix},$$

z čehož vidíme, že $r = 0$ a $s = 0$, neboli jediným vektorem v průniku je $0\cdot w_1 + 0\cdot w_2$, čili nulový vektor. □

Další příklady na procvičování:

3. Tvoří všechny polynomy proměnné X s koeficienty nad $\mathbb{Z}_3$ stupně nejvýše 10 vektorový prostor? Kolik má tento prostor prvků?

   Řešení: Přímočaré, ano, 3^{11}.

4. Nad $\mathbb{Z}_7$ určete, kolik prvků má $\left\langle \begin{pmatrix}6\\2\\3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\5\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\6\\3\end{pmatrix} \right\rangle \cap \left\langle \begin{pmatrix}5\\0\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\\0\end{pmatrix} \right\rangle$

   Řešení: Označme dané vektory v_1, v_2, v_3 a w_1, w_2, w_3. Nyní stačí vyřešit rovnici $xv_1 + yv_2 + zv_3 = rw_1 + sw_2 + tw_3$, podívat se, jaké možné kombinace hodnot r, s, t vyšly a těmi přenásobit w_1, w_2, w_3. (Pokud by dané vektory byly lineárně závislé, mohlo by se stát, že více řešení dá ten samý vektor.) Odpověď: 49

5. Uvažme vektorový prostor všech funkcí z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{Z}_2$. Pro i, buď a_i funkce, která i zobrazí na 1 a vše ostatní na 0. Buď b funkce, která vše zobrazí na jedničku. Leží b v lineárním obalu $\langle a_i, i \in \mathbb{N}\rangle$?

   Řešení: neleží, v lineárním obalu leží jen lineární kombinace konečného počtu vektorů, a to b není.

6. Je-li $\mathbb{T}$ komutativní těleso, tak každý podprostor $\mathbb{T}^n$ lze popsat dvěma různými způsoby: Buď jakožto řešení systému rovnic, nebo jako lineární obal nějakých vektorů.

   (a) Nad $\mathbb{Q}$ popište řešení homogenní soustavy $\begin{pmatrix}1&2&1&4\\2&-2&1&3\end{pmatrix}$ jako lineární obal vektorů.
   Řešení: Jde vlastně o to, vyřešit danou soustavu rovnic. Řešení lze zapsat např. v tvaru

   $$\{r\cdot\begin{pmatrix}3&1&-5&0\end{pmatrix}^T + s\cdot\begin{pmatrix}1&0&-5&1\end{pmatrix}^T \mid r, s \in \mathbb{Q}\}.$$

   Tedy výsledkem je $\langle\begin{pmatrix}3&1&-5&0\end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix}1&0&-5&1\end{pmatrix}^T\rangle$.

(b) Najděte soustavu rovnic, jejímž řešením bude lineární obal vektorů $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Hint: Hledáme vlastně taková čísla a, b, c, d, aby platilo $1 \cdot a + 2 \cdot b - 1 \cdot c + 0 = 0$ a $1 \cdot a + 0 \cdot b + 0 \cdot c + 1 \cdot d = 0$.
Jinými slovy řešíme rovnici $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Nestačí však najít jedno řešení (to by řešení oné soustavy mohlo vyjít větší než onen požadovaný lineární obal).

Řešení: Například $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.